7. Sekundärliteratur

Festschrift zur zweihundertjährigen Jubelfeier der Franckeschen Stiftungen und der Lateinischen Hauptschule am 30. Juni und 1. Juli 1898.

Kollegium der Lateinischen Hauptschule

Halle a. S., 1898

Punktrechnung und projektive Geometrie.

Punktrechnung und projektive Geometrie.

Dritter Teil:

Die linearen Verwandtschaften in der Ebene.

Von

Hermann Grafsmann.

Siebenter Abschnitt.[1])

Die Kollineation.

Für die analytische Behandlung der geometrischen Verwandtschaften ist es von Nutzen, Brüche einzuführen, deren Zähler und Nenner geometrische Gröfsen, zum Beispiel Punkte oder Strecken, Stäbe oder Felder sind. Die geometrische Bedeutung und die rechnerische Handhabung solcher „extensiven Brüche" möge an dem Beispiel der kollinearen Verwandtschaft in der Ebene entwickelt werden.

Man benutze dabei als Grundpunkte drei nicht in gerader Linie liegende vielfache Punkte

$$e_1 = \mathfrak{m}_1 a_1, \quad e_2 = \mathfrak{m}_2 a_2, \quad e_3 = \mathfrak{m}_3 a_3,$$

deren Massen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ in der Weise bestimmt sein mögen, dafs das äufsere Produkt

230) . . . $[e_1\, e_2\, e_3] = 1$

wird, und dafs überdies ein der Lage nach beliebig gewählter vierter Punkt e, welcher nur nicht mit zwei Grundpunkten in derselben geraden Linie liegen mag, der Einheitspunkt wird, dafs also

231) . . . $e = e_1 + e_2 + e_3$

wird (vgl. Fig. 54). Durch diese beiden Forderungen sind, wie im sechsten Abschnitte gezeigt ist, die Massen der drei Grundpunkte eindeutig bestimmt und damit auch die Masse des Einheitspunktes. Aufserdem läfst sich jeder beliebige weitere Punkt x der Ebene als Vielfachensumme der drei Grundpunkte e_1, e_2, e_3 also unter der Form

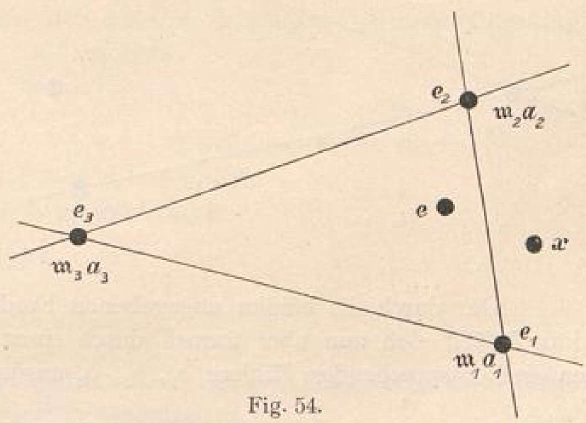


Fig. 54.

232) . . . . $x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$

---

1) Die drei ersten Abschnitte der vorliegenden Arbeit erschienen im Jahre 1894 als Beitrag für die Festschrift der Lateinischen Hauptschule zur zweihundertjährigen Jubelfeier der Universität Halle-Wittenberg unter dem Titel: Punktrechnung und projektive Geometrie. Erster Teil: Punktrechnung. Die drei folgenden Abschnitte bildeten die Beilage zum Programm der Lateinischen Hauptschule vom Jahre 1896 mit dem Titel: Punktrechnung und projektive Geometrie. Zweiter Teil: Grundlagen der projektiven Geometrie.

darstellen. Seine Ableitzahlen sind dabei die auf das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ als Fundamentaldreieck bezogenen Dreieckskoordinaten des Punktes x.

Will man jetzt einen Verwandtschaftsfaktor $\mathfrak{f}$ definieren, der jeden beliebigen Punkt x der Ebene bei der Multiplikation in einen (im Allgemeinen) von ihm getrennt liegenden, eindeutig bestimmten Punkt $y = x\mathfrak{f}$ derselben Ebene überführt, so hat man

erstens diejenigen Punkte b_1, b_2, b_3 festzulegen, die den Grundpunkten e_1, e_2, e_3 zugeordnet werden sollen, welche also den Gleichungen

$$233) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e_1\mathfrak{f} = b_1, \quad e_2\mathfrak{f} = b_2, \quad e_3\mathfrak{f} = b_3$$

Genüge leisten. Daneben aber kann man

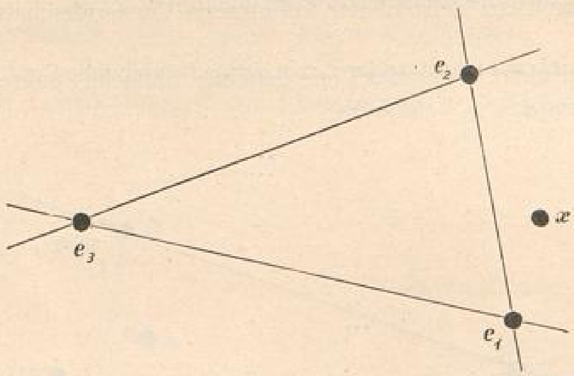
zweitens noch die Forderung stellen, es solle ein jeder Punkt

$$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3,$$

welcher durch die drei Zahlgröfsen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ aus den drei Grundpunkten e_1, e_2, e_3 abgeleitet ist, in denjenigen Punkt $x\mathfrak{f}$ umgewandelt werden, der aus den „Bildern" b_1, b_2, b_3 der drei Grundpunkte durch *dieselben* Ableitzahlen entwickelt wird, das heifst in den Punkt

$$234) \quad \ldots \quad x\mathfrak{f} = \mathfrak{x}_1 b_1 + \mathfrak{x}_2 b_2 + \mathfrak{x}_3 b_3.$$

Durch die Punkte x und $x\mathfrak{f}$ wird dann die Ebene doppelt überdeckt. Zur Unterscheidung mögen die Punkte x die Punkte des ersten Systems und die Punkte $x\mathfrak{f}$ die Punkte des zweiten Systems genannt werden (vgl. Fig. 55).



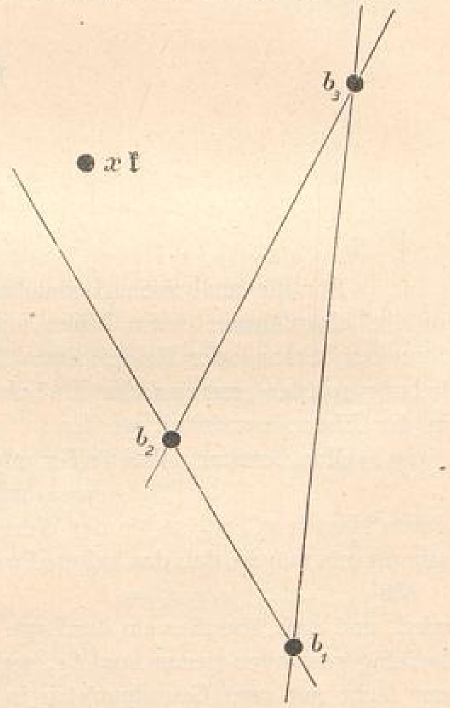


Fig. 55.

Der durch die beiden angegebenen Forderungen sachlich definierte Verwandtschaftsfaktor $\mathfrak{f}$ läfst sich nun aber formell durch einen Bruch mit den *drei* Nennern e_1, e_2, e_3 und den *drei* entsprechenden Zählern b_1, b_2, b_3 ausdrücken, das heifst in der Form

$$235) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{f} = \frac{b_1,\ b_2,\ b_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}.$$

Durch eine solche Bruchdarstellung kann man nämlich andeuten, dafs aus jeder von den drei in den Nenner gestellten Gröfsen e_i bei der Multiplikation mit $\mathfrak{f}$ der entsprechende Zähler b_i hervorgeht, dafs also wirklich die drei Gleichungen bestehen

$$236) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e_i\mathfrak{f} = b_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Man wird aber zugleich auch der zweiten von den beiden oben gestellten Forderungen gerecht, wenn man noch die Bestimmung hinzufügt, der Bruch $\mathfrak{f}$ solle sich einer Vielfachensumme von Punkten gegenüber bei der Multiplikation distributiv verhalten. In der That wird dann

$$x\mathfrak{k} = (\mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3)\,\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 e_1 \mathfrak{k} + \mathfrak{x}_2 e_2 \mathfrak{k} + \mathfrak{x}_3 e_3 \mathfrak{k},$$

das heifst wegen 236)

$$x\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 b_1 + \mathfrak{x}_2 b_2 + \mathfrak{x}_3 b_3,$$

wie oben in 234) verlangt wurde.

Setzt man endlich noch fest, dafs zwei Verwandtschaftsfaktoren, welche Punkte in Punkte überführen, und ebenso zwei Vielfachensummen solcher Verwandtschaftsfaktoren dann und nur dann einander gleich gesetzt werden sollen, wenn sie mit *jedem* Punkt der Ebene multipliziert Gleiches liefern, wobei wie immer an der Distributivität der Multiplikation festgehalten wird, so ist damit der Verwandtschaftsbruch $\mathfrak{k}$ *auch als Gröfse* vollständig definiert. Insbesondere erscheinen alsdann die Zahlgröfsen als specielle Fälle eines solchen Verwandtschaftsbruches. So hat zum Beispiel der Bruch

$$\frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

mit der Zahlgröfse 1 die Eigenschaft gemein, jeden Punkt x bei der Multiplikation unverändert zu lassen, und man kann daher jenen Bruch

$$\frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{e_1,\ e_2,\ e_3} = 1$$

setzen. Damit hat man dann zugleich die Möglichkeit gewonnen, einen Verwandtschaftsbruch von der Form 235) mit einer beliebigen Zahlgröfse durch Addition oder Subtraktion zu verknüpfen.

Ferner ergiebt sich sofort, dafs es zur Gleichheit zweier solcher Verwandtschaftsbrüche *hinreicht*, wenn sie mit *drei* nicht in gerader Linie liegenden Punkten multipliziert Gleiches liefern. Sind nämlich $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ zwei solche Verwandtschaftsbrüche, welche mit drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten $d_1,\ d_2,\ d_3$ multipliziert Gleiches liefern, für die also die Gleichungen bestehen

†) . . . . $d_1\mathfrak{k} = d_1\mathfrak{k}',\quad d_2\mathfrak{k} = d_2\mathfrak{k}',\quad d_3\mathfrak{k} = d_3\mathfrak{k}',$

so wird sicher auch für *jeden beliebigen* Punkt x

$$x\mathfrak{k} = x\mathfrak{k}',$$

so dafs man also auch setzen kann

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}'.$$

Denn jeder beliebige Punkt x der Ebene läfst sich aus den drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten $d_1,\ d_2,\ d_3$ numerisch ableiten. Es sei etwa

$$x = \mathfrak{a}_1 d_1 + \mathfrak{a}_2 d_2 + \mathfrak{a}_3 d_3;$$

dann wird

$$\begin{aligned} x\mathfrak{k} &= \mathfrak{a}_1\, d_1\mathfrak{k} + \mathfrak{a}_2\, d_2\mathfrak{k} + \mathfrak{a}_3\, d_3\mathfrak{k}, \quad \text{das heifst wegen †)} \\ &= \mathfrak{a}_1\, d_1\mathfrak{k}' + \mathfrak{a}_2\, d_2\mathfrak{k}' + \mathfrak{a}_3\, d_3\mathfrak{k}' \\ &= (\mathfrak{a}_1 d_1 + \mathfrak{a}_2 d_2 + \mathfrak{a}_3 d_3)\,\mathfrak{k}' \\ &= x\mathfrak{k}', \end{aligned}$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Aus der analytischen Forderung der Distributivität des Bruches $\mathfrak{k}$ entspringen unmittelbar die geometrischen Grundeigenschaften der Verwandtschaft,

zunächst diejenige Eigenschaft, der die Verwandtschaft $\mathfrak{k}$ ihren Namen Kollineation verdankt. Sind nämlich $x,\ y,\ z$ drei Punkte *einer* Geraden (vgl. Fig. 56), so läfst sich jeder von ihnen als Vielfachensumme der beiden andern darstellen, das heifst, es wird zum Beispiel

237) . . . . $z = \mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y.$

Den drei Punkten $x,\ y,\ z$ entsprechen nun aber nach Obigem die Punkte

$$x\mathfrak{k},\ y\mathfrak{k},\ z\mathfrak{k},$$

und es wird mit Rücksicht auf 237)

$$z\mathfrak{k} = (\mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y)\,\mathfrak{k},$$

woraus wegen der Distributivität von $\mathfrak{k}$ folgt, dafs

238) . . . . $z\mathfrak{k} = \mathfrak{x}\, x\mathfrak{k} + \mathfrak{y}\, y\mathfrak{k}$

ist. Diese Gleichung aber zeigt wirklich, dafs auch der Punkt $z\mathfrak{k}$ mit den Punkten $x\mathfrak{k}$ und $y\mathfrak{k}$ auf *einer* Geraden liegt. Die Verwandtschaft $\mathfrak{k}$ hat also die Eigenschaft, dafs Punkten, die zusammen auf einer Geraden liegen, die also, wie man sagt, kollinear sind, stets wieder kollineare Punkte entsprechen. Aus diesem Grunde heifst die Verwandtschaft $\mathfrak{k}$ die kollineare Verwandtschaft oder Kollineation.

Eine zweite Eigenschaft der kollinearen Verwandtschaft, die mit der ersten eng zusammenhängt, läfst sich ebenfalls unmittelbar aus der Distributivität des Bruches $\mathfrak{k}$ ableiten, nämlich die *Invarianz des Doppelverhältnisses* von vier Punkten einer Geraden.

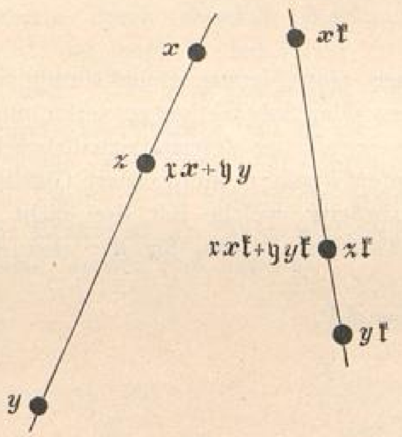


Fig. 56.

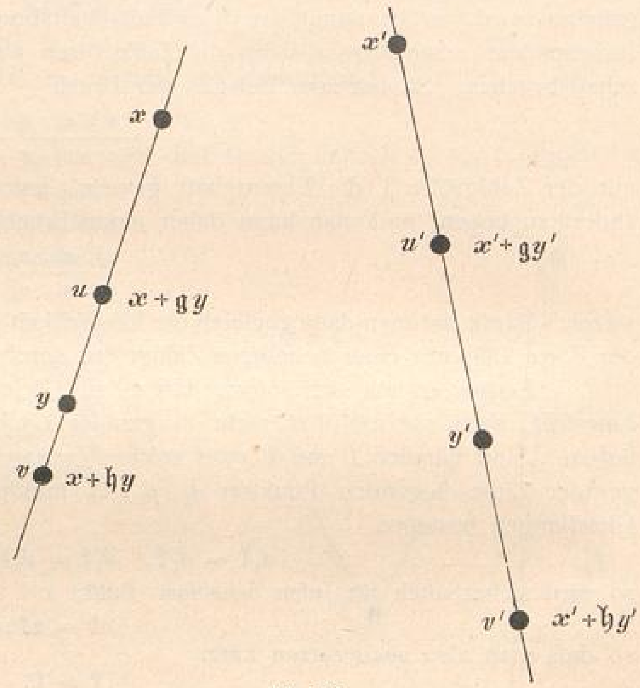


Fig. 57.

Wie schon gelegentlich der Einführung des Doppelverhältnisses (Teil II, S. 38) entwickelt ist, lassen sich vier in einer Geraden liegende Punkte, auf deren Masse es nicht ankommt, stets in der Form darstellen

$$x,\ y,\ u = x + \mathfrak{g}y,\ v = x + \mathfrak{h}y$$

(vgl. Fig. 57), und das Doppelverhältnis des Punktwurfes $xyuv$ wird

239) . . . . $\dfrac{[xu]}{[uy]} : \dfrac{[xv]}{[vy]} = \dfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$,

das heifst gleich dem Verhältnis der Parameter des dritten und des vierten Punktes. Sind nun x', y', u', v' diejenigen Punkte, die den Punkten x, y, u, v jenes Wurfes in der Kollineation $\mathfrak{k}$ zugeordnet sind, so wird

$x' = x\mathfrak{k}$, $y' = y\mathfrak{k}$ und mit Rücksicht auf die Distributivität von $\mathfrak{k}$

$$u' = u\mathfrak{k} = (x + \mathfrak{g}y)\,\mathfrak{k} = x\mathfrak{k} + \mathfrak{g}\, y\mathfrak{k} = x' + \mathfrak{g}y'$$
$$v' = v\mathfrak{k} = (x + \mathfrak{h}y)\,\mathfrak{k} = x\mathfrak{k} + \mathfrak{h}\, y\mathfrak{k} = x' + \mathfrak{h}y'.$$

Die vier Punkte des zugeordneten Wurfes erscheinen daher unter der Form

$$x',\ y',\ u' = x' + \mathfrak{g}y',\ v' = x' + \mathfrak{h}y'.$$

Sein Doppelverhältnis wird also wieder

240) . . . . $\dfrac{[x'u']}{[u'y']} : \dfrac{[x'v']}{[v'y']} = \dfrac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$.

Aus der Invarianz des Doppelverhältnisses eines Punktwurfes aber folgert man weiter den Satz:

Jede Punktreihe wird durch eine Kollineation in eine *projektive* Punktreihe übergeführt.

Will man noch die Frage beantworten, *wie viele* Punkte man in den beiden Systemen der Punkte x und $x\mathfrak{k}$ beliebig wählen darf, um die Verwandtschaft festzulegen, so denke man sich auch über die Massen $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$ der Zählerpunkte b_1, b_2, b_3 des Bruches $\mathfrak{k}$ in entsprechender Weise verfügt wie über die Massen der Nennerpunkte, nämlich so, dafs

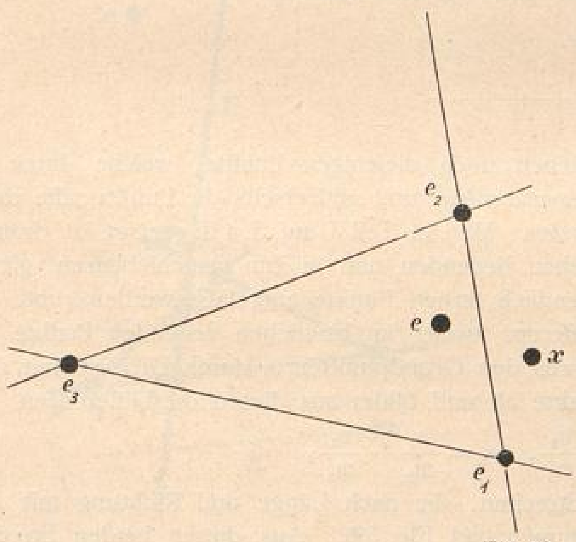
erstens das Produkt

241) . . . $[b_1 b_2 b_3] = 1$ wird, und dafs

zweitens ein der Lage nach beliebig gewählter Punkt b der Einheitspunkt der drei Punkte b_1, b_2, b_3 wird, dafs also

242) . . . $b = b_1 + b_2 + b_3$

wird (vgl. Fig. 58).



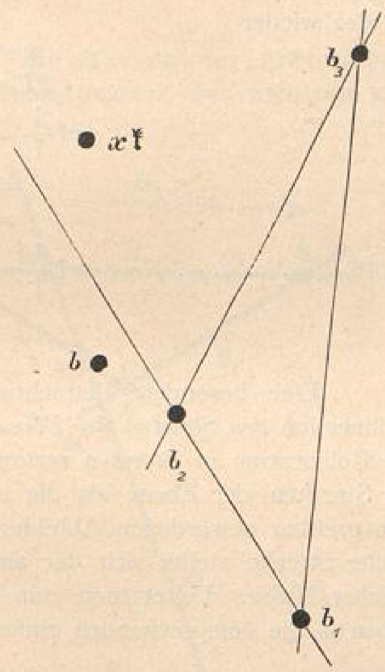


Fig. 58.

Durch diese beiden Forderungen sind dann auch die Massen der drei Zählerpunkte b_i eindeutig bestimmt, und es wird zugleich

243) . . . $b = b_1 + b_2 + b_3 = e_1\mathfrak{k} + e_2\mathfrak{k} + e_3\mathfrak{k} = (e_1 + e_2 + e_3)\mathfrak{k} = e\mathfrak{k}$,

das heifst, der Einheitspunkt b des Zählersystems wird durch die Kollineation $\mathfrak{k}$ dem Einheitspunkte e des Nennersystems zugewiesen. Da nun aber sowohl die vier Punkte e_1, e_2, e_3 und e, wie die vier Punkte b_1, b_2, b_3 und b ihrer Lage nach ganz beliebig gewählt werden können, so hat man den folgenden Fundamentalsatz:

Um eine Kollineation in der Ebene festzulegen, kann man *vier* beliebig gelegenen Punkte des einen Systems *vier* beliebig gelegene Punkte des andern zuweisen. Dadurch ist dann die Verwandtschaft eindeutig bestimmt.

Durch die soeben getroffenen Festsetzungen über die Massen der Zählerpunkte b_i sind die drei Zähler des Bruches $\mathfrak{k}$ mit seinen drei Nennern durchaus gleichartig definiert. Der durch die Vertauschung der Zähler und Nenner von $\mathfrak{k}$ hervorgehende reciproke Bruch

$$244) \quad \frac{1}{\mathfrak{k}} = \frac{e_1,\, e_2,\, e_3}{b_1,\, b_2,\, b_3}$$

wird daher ebenfalls eine Kollineation darstellen müssen, und zwar gerade die umgekehrte, „inverse" Kollineation, durch welche die Punkte $x\mathfrak{k}$ des zweiten Systems der Kollineation $\mathfrak{k}$ in die entsprechenden Punkte x des ersten Systems zurückverwandelt werden. Denn nach dem Begriffe des extensiven Bruches wird

$$245) \quad b_i \frac{1}{\mathfrak{k}} = e_i .$$

Ist also wieder

$$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3, \text{ somit}$$
$$x\mathfrak{k} = \mathfrak{x}_1 b_1 + \mathfrak{x}_2 b_2 + \mathfrak{x}_3 b_3, \text{ so wird}$$
$$x\mathfrak{k}\frac{1}{\mathfrak{k}} = (\mathfrak{x}_1 b_1 + \mathfrak{x}_2 b_2 + \mathfrak{x}_3 b_3)\frac{1}{\mathfrak{k}}$$
$$= \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$$
$$= x, \text{ das heifst, es wird wirklich}$$

$$246) \quad x\mathfrak{k}\frac{1}{\mathfrak{k}} = x .$$

Eine besondere Betrachtung verdienen noch diejenigen Punkte, welche durch die Kollineation *den Strecken der Ebene zugewiesen werden*, und andrerseits die Punkte, die durch die Kollineation *in Strecken verwandelt werden*. Wie in Teil I auf S. 4 ff. gezeigt ist, können die Strecken der Ebene als die im Endlichen liegenden und in ihm verschiebbaren, gleichsam greifbar gewordenen Abbilder der unendlich fernen Punkte aufgefafst werden, und eine solche Strecke stellte sich dar als die Differenz zweier im Endlichen liegenden Punkte von gleicher Masse. Leitet man zum Beispiel aus den Grundpunkten e_i durch Division mit ihrer Masse $\mathfrak{m}_i$ die entsprechenden einfachen Punkte ab und bildet aus diesen die Differenzen

$$247) \quad g_1 = \frac{e_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3}, \quad g_2 = \frac{e_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3},$$

so erhält man die Ausdrücke für zwei Strecken, die nach Länge und Richtung mit zwei Seiten des Fundamentaldreiecks übereinstimmen (vgl. Fig. 59). Aus diesen beiden Strecken läfst sich dann jede weitere Strecke g der Ebene numerisch ableiten, das heifst, es lassen sich zu jeder Strecke g der Ebene zwei Zahlgröfsen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ finden, für welche die Gleichung besteht

$$248) \quad g = \mathfrak{a}_1 g_1 + \mathfrak{a}_2 g_2 ;$$

und umgekehrt stellt jeder Ausdruck von der Form 248) eine Strecke der Ebene dar.

Bezeichnet man weiter diejenigen Gröfsen, welche die Kollineation $\mathfrak{k}$ den drei Strecken g_1, g_2 und g zuweist mit q_1, q_2 und q, setzt also

$$249) \quad q_1 = g_1\mathfrak{k}, \quad q_2 = g_2\mathfrak{k}, \quad q = g\mathfrak{k}, \text{ so wird}$$

$$250) \quad q_1 = \frac{b_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3}, \quad q_2 = \frac{b_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3} \text{ und}$$

$$251) \quad q = \mathfrak{a}_1 q_1 + \mathfrak{a}_2 q_2 .$$

Es bieten sich dann der Betrachtung zwei wesentlich verschiedene Fälle dar.

Erstens nämlich der Fall, wo die beiden Gröfsen q_1 und q_2 selbst wieder Strecken sind. Dann ist auch ihre Vielfachensumme q eine Strecke; die Kollineation $\mathfrak{k}$ verwandelt also überhaupt *jede* Strecke g der Ebene wieder in eine Strecke, oder anders ausgedrückt, sie weist jedem unendlich fernen Punkte wieder einen unendlich fernen Punkt zu. Daraus aber folgt, dafs *parallele Geraden*, das heifst gerade Linien, die einen unendlich fernen Punkt gemein haben, in gerade Linien derselben Art übergeführt werden, also bei ihrer Abbildung *parallel bleiben.*

Die durch diese Eigenschaft charakterisierte besondere Art der Kollineation führt den Namen Affinität. Ihr analytisches Merkmal findet man, wenn man die Bedingung aufsucht, unter der die Punkte des Minuendus und Subtrahendus der Differenzen 250) gleiche Massen besitzen. Dazu bezeichne man noch die Massen der Grundpunkte b_i des zweiten Systems mit $\mathfrak{n}_i$, so werden die in Betracht kommenden Brüche $\frac{b_1}{\mathfrak{m}_1}, \frac{b_2}{\mathfrak{m}_2}, \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3}$ gleiche Massen haben, sobald sich verhält

252) . . . . $\mathfrak{m}_1 : \mathfrak{m}_2 : \mathfrak{m}_3 = \mathfrak{n}_1 : \mathfrak{n}_2 : \mathfrak{n}_3$.

Man hat also den Satz:

Eine Kollineation wird zur Affinität, wenn die Massen der drei Grundpunkte des ersten Systems den Massen der drei Grundpunkte des zweiten proportioniert sind.

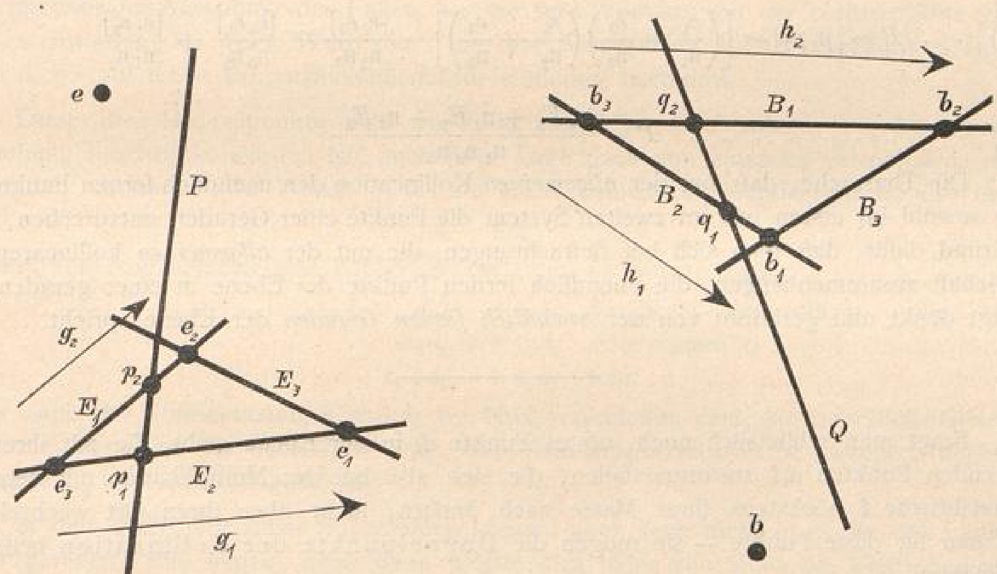


Fig. 59.

Der zweite, allgemeinere, Fall ist der, wo die Bedingung 252) *nicht* erfüllt ist, wo also die beiden durch die Differenzen 250) dargestellten Punkte q_1 und q_2 nicht beide zugleich unendlich fern sind (vgl. Fig. 59). Dann liegt wegen 251) ein jeder Punkt q, der im zweiten Systeme einem unendlich fernen Punkte g des ersten Systems entspricht, auf der durch die Punkte q_1 und q_2 bestimmten Geraden

253) . . $Q = [q_1 q_2] = \left[\left(\frac{b_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3}\right)\left(\frac{b_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{b_3}{\mathfrak{m}_3}\right)\right] = \frac{[b_2 b_3]}{\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3} + \frac{[b_3 b_1]}{\mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1} + \frac{[b_1 b_2]}{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2}$.

Diese Gerade Q, deren Punkte den unendlich fernen Punkten des ersten Systems zugeordnet sind, heifst die Fluchtlinie des zweiten Systems. Der für sie gewonnene Ausdruck vereinfacht sich noch etwas, wenn man entsprechend den obigen Gleichungen

171) . . . . $[e_2 e_3] = E_1, \quad [e_3 e_1] = E_2, \quad [e_1 e_2] = E_3$

auch für die Produkte $[b_i b_k]$ kurze Bezeichnungen einführt, also etwa setzt

254) . . . . $[b_2 b_3] = B_1, \quad [b_3 b_1] = B_2, \quad [b_1 b_2] = B_3$.

Dadurch verwandelt sich der Ausdruck für Q in

255) . . . . $$Q = \frac{\mathfrak{m}_1 B_1 + \mathfrak{m}_2 B_2 + \mathfrak{m}_3 B_3}{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3}.$$

Eine zweite Fluchtlinie, nämlich die Fluchtlinie des ersten Systems, erhält man, wenn man diejenigen Punkte aufsucht, die durch die inverse Kollineation $\frac{1}{\mathfrak{k}}$ den unendlich fernen Punkten des zweiten Systems zugewiesen werden. Sind p_1 und p_2 die Punkte des ersten Systems, die den Strecken

256) . . . . $$h_1 = \frac{b_1}{\mathfrak{n}_1} - \frac{b_3}{\mathfrak{n}_3}, \quad h_2 = \frac{b_2}{\mathfrak{n}_2} - \frac{b_3}{\mathfrak{n}_3}$$

des zweiten Systems entsprechen, ist also

257) . . . . $$p_1 = h_1 \frac{1}{\mathfrak{k}}, \quad p_2 = h_2 \frac{1}{\mathfrak{k}}.$$

und daher wegen 244)

258) . . . . $$p_1 = \frac{e_1}{\mathfrak{n}_1} - \frac{e_3}{\mathfrak{n}_3}, \quad p_2 = \frac{e_2}{\mathfrak{n}_2} - \frac{e_3}{\mathfrak{n}_3},$$

so erhält man für die Fluchtlinie P des ersten Systems die Darstellung

259) . . $$P = [p_1 p_2] = \left[\left(\frac{e_1}{\mathfrak{n}_1} - \frac{e_3}{\mathfrak{n}_3}\right)\left(\frac{e_2}{\mathfrak{n}_2} - \frac{e_3}{\mathfrak{n}_3}\right)\right] = \frac{[e_2 e_3]}{\mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_3} + \frac{[e_3 e_1]}{\mathfrak{n}_3 \mathfrak{n}_1} + \frac{[e_1 e_2]}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2}$$

oder

260) . . . . $$P = \frac{\mathfrak{n}_1 E_1 + \mathfrak{n}_2 E_2 + \mathfrak{n}_3 E_3}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_3}.$$

Die Thatsache, dafs bei der *allgemeinen* Kollineation den unendlich fernen Punkten der Ebene sowohl im ersten wie im zweiten System die Punkte einer Geraden entsprechen, bildet den Grund dafür, dafs man sich bei Betrachtungen, die mit der *allgemeinen* kollinearen Verwandtschaft zusammenhängen, die unendlich fernen Punkte der Ebene in einer geraden Linie vereinigt denkt und geradezu von der *unendlich fernen Geraden* der Ebene spricht.

Fragt man schliefslich noch, ob es Punkte d_i in der Ebene giebt, die mit ihren entsprechenden Punkten $d_i \mathfrak{k}$ zusammenfallen, die sich also bei der Multiplikation mit dem Kollineationsbruche $\mathfrak{k}$ höchstens ihrer Masse nach ändern, nicht aber ihren Ort wechseln, so erhält man für diese Punkte — sie mögen die Doppelpunkte der Kollineation heifsen — die Gleichung

261) . . . . $$d_i \mathfrak{k} = \mathfrak{r}_i d_i,$$

in der $\mathfrak{r}_i$ einen Zahlfaktor bedeutet, der die Massenänderung des Punktes d_i bewirken soll, und in welcher selbstverständlich d_i nicht null sein darf. Diese Gleichung läfst sich zunächst in der Form schreiben

262) . . . . $$0 = d_i(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{k})$$

und verwandelt sich, wenn man noch die Ableitzahlen von d_i mit $\mathfrak{d}_{i1}$, $\mathfrak{d}_{i2}$, $\mathfrak{d}_{i3}$ bezeichnet, also

263) . . . . $$d_i = \mathfrak{d}_{i1} e_1 + \mathfrak{d}_{i2} e_2 + \mathfrak{d}_{i3} e_3$$

setzt, in

$$0 = \mathfrak{d}_{i1} e_1 (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{k}) + \mathfrak{d}_{i2} e_2 (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{k}) + \mathfrak{d}_{i3} e_3 (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{k})$$

oder wegen 236) in

264) . . . . . $$0 = \mathfrak{d}_{i1}(e_1 \mathfrak{r}_i - b_1) + \mathfrak{d}_{i2}(e_2 \mathfrak{r}_i - b_2) + \mathfrak{d}_{i3}(e_3 \mathfrak{r}_i - b_3).$$

Hier können dann nicht alle drei Koeffizienten $\mathfrak{d}_{ik}$ gleichzeitig null sein, weil sonst wegen 263) auch d_i verschwinden würde, was oben ausgeschlossen ist. Wenn aber von den drei Zahlgröfsen $\mathfrak{d}_{i1}$, $\mathfrak{d}_{i2}$, $\mathfrak{d}_{i3}$ auch nur eine, etwa die Gröfse $\mathfrak{d}_{i1}$ von Null verschieden ist, so folgt aus der Gleichung 264) durch äufsere Multiplikation mit dem Produkte $[(e_2 \mathfrak{r}_i - b_2)(e_3 \mathfrak{r}_i - b_3)]$ und Division mit $\mathfrak{d}_{i1}$ die Gleichung

265) . . . . $[(e_1 \mathfrak{r}_i - b_1)(e_2 \mathfrak{r}_i - b_2)(e_3 \mathfrak{r}_i - b_3)] = 0$,

für die man wegen 230) und 241), 171) und 254) auch schreiben kann

266) . $\mathfrak{r}_i^3 - \{[b_1 E_1] + [b_2 E_2] + [b_3 E_3]\} \mathfrak{r}_i^2 + \{[B_1 e_1] + [B_2 e_2] + [B_3 e_3]\} \mathfrak{r}_i - 1 = 0.$

Diese Gleichung dritten Grades liefert für die Zahlgröfse $\mathfrak{r}_i$ drei Werte $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, welche die Hauptzahlen des Bruches $\mathfrak{k}$ heifsen mögen. Hat man sie bestimmt, und sind alle drei Hauptzahlen reell und von einander verschieden, so läfst sich zu jeder Hauptzahl $\mathfrak{r}_i$ mit Hülfe der Gleichung 264) der ihr zugehörige Doppelpunkt d_i ermitteln.[1]) Multipliziert man nämlich die Gleichung 264) der Reihe nach mit den Punkten $e_k \mathfrak{r}_i - b_k$ $(k = 1, 2, 3)$, so erhält man die Verhältnisse der drei Ableitzahlen $\mathfrak{d}_{i1}$, $\mathfrak{d}_{i2}$, $\mathfrak{d}_{i3}$ des Punktes d_i. Durch Multiplikation mit dem Punkte $e_1 \mathfrak{r}_i - b_1$ ergiebt sich zum Beispiel die Gleichung

$$0 = \mathfrak{d}_{i2} [(e_1 \mathfrak{r}_i - b_1)(e_1 \mathfrak{r}_i - b_2)] + \mathfrak{d}_{i3} [(e_1 \mathfrak{r}_i - b_1)(e_3 \mathfrak{r}_i - b_3)].$$

Aus ihr aber und den beiden andern so entstehenden Gleichungen folgt die laufende Proportion

267) $\mathfrak{d}_{i1} : \mathfrak{d}_{i2} : \mathfrak{d}_{i3} = [(e_2 \mathfrak{r}_i - b_2)(e_3 \mathfrak{r}_i - b_3)] : [(e_3 \mathfrak{r}_i - b_3)(e_1 \mathfrak{r}_i - b_1)] : [(e_1 \mathfrak{r}_i - b_1)(e_2 \mathfrak{r}_i - b_2)]$,

welche mit einziger Ausnahme des Falles, wo die drei Produkte auf der rechten Seite gleichzeitig verschwinden, für jeden Wert von i die drei Ableitzahlen $\mathfrak{d}_{ik}$ des zugehörigen Doppelpunktes d_i bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt.

Diese drei Doppelpunkte sind im Falle ungleicher Hauptzahlen, auf den oben die Untersuchung beschränkt worden ist, auch ihrer Lage nach von einander verschieden. Denn angenommen, es wären zwei Punkte d_i bis auf einen Zahlfaktor einander gleich, also etwa

$$*) \quad d_2 = \mathfrak{s} d_1,$$

wo $\mathfrak{s}$ eine von Null verschiedene Zahlgröfse bedeutet, so müfste auch

$$d_2 \mathfrak{k} = \mathfrak{s}\, d_1 \mathfrak{k}, \quad \text{das heifst wegen 261)}$$
$$\mathfrak{r}_2 d_2 = \mathfrak{s}\, \mathfrak{r}_1 d_1 \quad \text{oder wegen *)}$$
$$\mathfrak{r}_2\, \mathfrak{s} d_1 = \mathfrak{s}\, \mathfrak{r}_1 d_1 \quad \text{sein.}$$

Da aber nach der Voraussetzung $\mathfrak{s}$ und d_1 von Null verschieden sind, so kann diese Gleichung nicht anders bestehen, als wenn $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1$ ist, was oben ausgeschlossen ist. Folglich liegen die drei Punkte d_i von einander getrennt.

In dem Falle ungleicher Hauptzahlen können aber auch nicht etwa die drei Punkte d_i in einer geraden Linie liegen; denn dann müfste sich jeder von ihnen als Vielfachensumme der beiden andern darstellen lassen, also etwa

$$**) \quad d_3 = \mathfrak{s}_1 d_1 + \mathfrak{s}_2 d_2$$

sein, wo $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ zwei von Null verschiedene Zahlgröfsen sind. Diese Gleichung aber führt ebenfalls auf einen Widerspruch. Aus ihr folgt nämlich wieder durch Multiplikation mit $\mathfrak{k}$ die Gleichung

$$d_3 \mathfrak{k} = \mathfrak{s}_1\, d_1 \mathfrak{k} + \mathfrak{s}_2\, d_2 \mathfrak{k},$$

für die man wegen 261) auch schreiben kann

$$\mathfrak{r}_3 d_3 = \mathfrak{s}_1\, \mathfrak{r}_1 d_1 + \mathfrak{s}_2\, \mathfrak{r}_2 d_2 \quad \text{oder wegen **)}$$
$$\mathfrak{r}_3 (\mathfrak{s}_1 d_1 + \mathfrak{s}_2 d_2) = \mathfrak{s}_1\, \mathfrak{r}_1 d_1 + \mathfrak{s}_2\, \mathfrak{r}_2 d_2 \quad \text{oder endlich}$$

†) . . . . $\mathfrak{s}_1 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1) d_1 + \mathfrak{s}_2 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) d_2 = 0.$

---

1) Vergleiche hierzu meine Darstellung der *Kollineationen des Raumes* in den Anmerkungen zur neuen Ausgabe der Ausdehnungslehre meines Vaters vom Jahre 1862 (Hermann Grafsmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke. Ersten Bandes zweiter Teil. In Gemeinschaft mit H. Grafsmann d. J. herausgegeben von Fr. Engel. Leipzig, Teubner 1896. S. 438—464). Dort habe ich auch die oben übergangenen Fälle gleicher und komplexer Hauptzahlen eingehend behandelt.

Nun stehen aber, wie oben bewiesen ist, die Punkte d_1 und d_2 nicht in einer Zahlbeziehung; und da nach der Voraussetzung die Zahlgröfsen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ ungleich Null sind, so kann die Gleichung †) nicht anders befriedigt werden, als wenn gleichzeitig

$$\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2 = 0$$

ist, was der Voraussetzung widersprechen würde, dafs alle drei Hauptzahlen von einander verschieden sind.

Unter den angegebenen Bedingungen besitzt daher die Kollineation drei ein Dreieck bildende Doppelpunkte.

Da die Kollineation $\mathfrak{k}$ den *Punkten einer Geraden* stets wieder *Punkte einer Geraden* zuweist, so kann man die durch den Bruch $\mathfrak{k}$ definierte Verwandtschaft auch als eine Beziehung zwischen den Geraden der Ebene auffassen. Diese Abbildung der Geraden der Ebene wird aber durch den Bruch $\mathfrak{k}$ nur indirekt vermittelt. Um eine direktere Darstellung derselben zu finden, berücksichtige man, dafs die Gerade eines beliebigen Stabes $[yz]$ durch die Kollineation $\mathfrak{k}$ in die Gerade des Stabes $[y\mathfrak{k} \cdot z\mathfrak{k}]$ übergeführt wird (vgl. Fig. 60), und suche die Beziehung zwischen den Ableitausdrücken dieser beiden Stäbe auf. Setzt man wie gewöhnlich

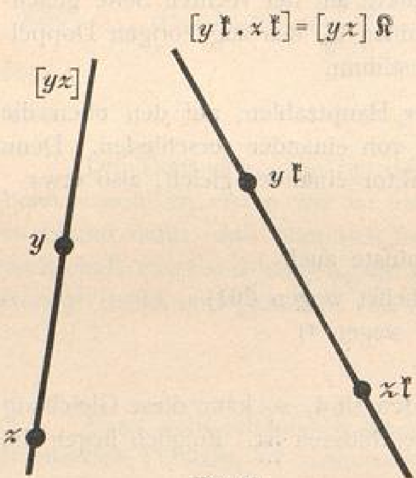


Fig. 60.

$$268) \quad \ldots \quad \begin{cases} y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3 \\ z = \mathfrak{z}_1 e_1 + \mathfrak{z}_2 e_2 + \mathfrak{z}_3 e_3, \end{cases}$$

so wird mit Rücksicht auf 171)

$$269) \quad . \quad [yz] = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} E_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} E_3 .$$

Andrerseits wird

$$270) \quad \ldots \quad \begin{cases} y\mathfrak{k} = \mathfrak{y}_1 b_1 + \mathfrak{y}_2 b_2 + \mathfrak{y}_3 b_3 \\ z\mathfrak{k} = \mathfrak{z}_1 b_1 + \mathfrak{z}_2 b_2 + \mathfrak{z}_3 b_3 \end{cases}$$

also bei Benutzung von 254)

$$271) \quad [y\mathfrak{k} \cdot z\mathfrak{k}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} B_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} B_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} B_3 .$$

Der Stab $[y\mathfrak{k} \cdot z\mathfrak{k}]$ wird also aus den Stäben B_1, B_2, B_3 durch dieselben Zahlgröfsen abgeleitet, durch die der entsprechende Stab $[yz]$ aus den Grundstäben E_1, E_2, E_3 hervorging; und man wird daher allgemein die Geraden der Stäbe $[yz]$ und $[y\mathfrak{k} \cdot z\mathfrak{k}]$ einander zuweisen, wenn man neben dem Bruche $\mathfrak{k}$ noch einen zweiten extensiven Bruch $\mathfrak{K}$ einführt, dessen Nenner und Zähler die Stäbe E_i und B_i sind, das heifst die multiplikativen Kombinationen ohne Wiederholung zur zweiten Klasse aus den Nennern und Zählern des Bruches $\mathfrak{k}$, wenn man also setzt

$$272) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{K} = \frac{B_1,\ B_2,\ B_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}, \quad \text{wo}$$

$$273) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} E_1 = [e_2 e_3], \quad E_2 = [e_3 e_1], \quad E_3 = [e_1 e_2] \\ B_1 = [b_2 b_3], \quad B_2 = [b_3 b_1], \quad B_3 = [b_1 b_2] \end{cases}$$

ist. In der That wird dann

$$274) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [yz]\,\mathfrak{K} = [y\mathfrak{k} \cdot z\mathfrak{k}]$$

und man erhält den Satz:

Adjungiert man einem Kollineationsbruche $\mathfrak{k} = \dfrac{b_1,\ b_2,\ b_3}{e_1,\ e_1,\ e_3}$ einen zweiten Bruch $\mathfrak{K} = \dfrac{B_1,\ B_2,\ B_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$ in der Weise, dafs dieser neue Bruch den Seiten E_i des

Nennerdreiecks von $\mathfrak{k}$ die Seiten B_i des Zählerdreiecks von $\mathfrak{k}$ zuordnet, diese Seiten dargestellt als die äufseren Produkte der Grundpunkte von $\mathfrak{k}$, so weist der „adjungierte Bruch“ $\mathfrak{K}$ überhaupt *jedem* Stabe $[yz]$, das heifst jedem Produkte zweier Punkte y und z des ersten Systems den Verbindungsstab $[y\mathfrak{k} \cdot z\mathfrak{k}]$ ihrer Bilder $y\mathfrak{k}$ und $z\mathfrak{k}$ im zweiten System zu.

Der Gleichung 274) läfst sich auch noch ein dualistisches Gegenstück an die Seite stellen. Da nämlich nach 174) den Formeln 273) die dualistisch entsprechenden Formeln

$$275) \quad \begin{cases} e_1 = [E_2 E_3], & e_2 = [E_3 E_1], \quad e_3 = [E_1 E_2] \\ b_1 = [B_2 B_3], & b_2 = [B_3 B_1], \quad b_3 = [B_1 B_2] \end{cases}$$

gegenüberstehen, so erhält man für den Schnittpunkt $[VW]$ zweier beliebigen Stäbe V und W, genau ebenso wie oben für den Verbindungsstab $[yz]$ zweier Punkte y und z, die Gleichung

$$276) \quad [VW]\mathfrak{k} = [V\mathfrak{K} \cdot W\mathfrak{K}]$$

und damit den Satz (vgl. Fig. 61):

Dem Schnittpunkte zweier Stäbe V und W wird durch den Kollineationsbruch $\mathfrak{k}$ der Schnittpunkt derjenigen beiden Stäbe $V\mathfrak{K}$ und $W\mathfrak{K}$ zugeordnet, welche den Stäben V und W durch den adjungierten Bruch $\mathfrak{K}$ zugewiesen werden.

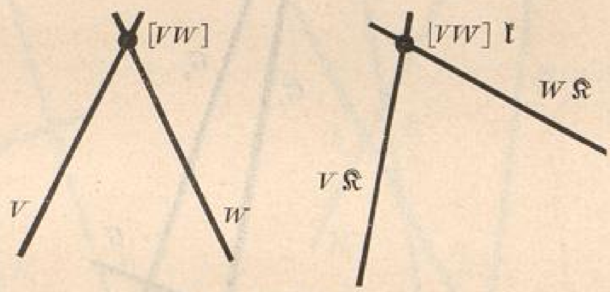


Fig. 61.

Überhaupt ergiebt die neue Auffassung der Kollineation als Stabverwandtschaft für jeden oben gewonnenen Satz eine dualistisch entsprechende Eigenschaft. Insbesondere kann man wieder aus der Distributivität des Bruches $\mathfrak{K}$ den Satz folgern:

Jeder Strahlwurf wird durch eine Kollineation in einen Strahlwurf von demselben Doppelverhältnis übergeführt.

Hieraus aber folgt weiter:

Jedes Strahlbüschel wird durch eine Kollineation in ein projektives Strahlbüschel verwandelt.

Ferner: Bei der kollinearen Abbildung wird das Bild einer Kurve zweiter Ordnung wieder eine Kurve zweiter Ordnung.

Wie in Teil II auf S. 44 gezeigt ist, kann man nämlich jede Kurve zweiter Ordnung als geometrischen Ort derjenigen Punkte x auffassen, welche vier feste Punkte a, b, c, d durch einen Strahlwurf von gegebenem Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$ projicieren. Wenn aber das Doppelverhältnis eines jeden Strahlwurfes bei der kollinearen Abbildung erhalten bleibt, so projiciert auch das Bild $x\mathfrak{k}$ des laufenden Punktes x jener Kurve zweiter Ordnung die Bilder $a\mathfrak{k}$, $b\mathfrak{k}$, $c\mathfrak{k}$, $d\mathfrak{k}$ jener vier festen Punkte durch einen Strahlwurf von dem Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$, das heifst, auch der Punkt $x\mathfrak{k}$ beschreibt eine Kurve zweiter Ordnung.

Ganz ebenso läfst sich übrigens aus der Invarianz des Doppelverhältnisses eines Punktwurfes der Satz ableiten:

Bei der kollinearen Abbildung wird das Bild einer Kurve zweiter Klasse wieder eine Kurve zweiter Klasse.

Denn eine jede Kurve zweiter Klasse kann nach Teil II, S. 45 als Enveloppe aller Geraden U aufgefafst werden, die von vier festen Geraden in einem Punktwurf von gegebenem Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$ geschnitten werden. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses bei der kollinearen Abbildung wird daher auch das Bild $U\mathfrak{K}$ der Geraden U die Bilder $A\mathfrak{K}$, $B\mathfrak{K}$, $C\mathfrak{K}$, $D\mathfrak{K}$ jener vier festen Geraden in einem Punktwurfe vom Doppelverhältnis $\mathfrak{g}$ schneiden, das heifst, selbst eine Kurve zweiter Klasse umhüllen müssen.

Um endlich noch die Frage zu entscheiden, ob eine Kollineation auch durch vier Paare zugeordneter Geraden festgelegt werden kann, beweise man zunächst den folgenden Hülfssatz:

Sind in einer Ebene vier gerade Linien G_1, G_2, G_3, G_4 gegeben, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, so läfst sich stets ein Fundamentaldreieck angeben, dessen Grundstäbe E_1, E_2, E_3 dreien von diesen Geraden angehören, während zugleich sein Einheitsstab

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

in der vierten Geraden gelegen ist (vgl. Fig. 62).

Zum Beweise bezeichne man mit a_1, a_2, a_3 diejenigen drei einfachen Punkte, in denen sich die drei Geraden G_1, G_2, G_3 schneiden, und mit a den einfachen Punkt, welcher der vierten Geraden G_4 in Bezug auf das Dreieck $a_1\ a_2\ a_3$ als Pol zugeordnet ist (vgl. Teil II, S. 54). Mit Rücksicht auf die soeben über die Geraden G_i getroffene Festsetzung, nach der keine drei von den vier Geraden G_i durch *einen* Punkt gehen sollen, nach der also insbesondere die Gerade G_4 nicht durch eine Ecke des Dreiecks $a_1\,a_2\,a_3$ hindurchgehen darf, kann dann der Pol a der Geraden G_4 auch nicht mit zweien von den drei Ecken a_1, a_2, a_3 jenes Dreiecks in einer geraden Linie liegen. Der Punkt a erfüllt also in Bezug auf das Dreieck $a_1\,a_2\,a_3$ die Bedingung, die oben in Teil II, S. 46 an den Einheitspunkt des Fundamentaldreiecks gestellt wurde. Wählt man daher zu Grundpunkten drei vielfache Punkte e_1, e_2, e_3 welche mit den Punkten a_1, a_2, a_3 zusammenfallen, und deren Massen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ so bestimmt sein mögen, dafs ein mit a kongruenter Punkt e der Einheitspunkt wird, und dafs zugleich $[e_1\,e_2\,e_3] = 1$ wird, was nach Teil II, S. 46 ff. immer, aber auch nur auf eine Weise möglich ist, so gehören wirklich nicht nur die drei Grundstäbe E_1, E_2, E_3 des Systems den drei gegebenen Geraden G_1, G_2, G_3 an, sondern es liegt zugleich auch (vgl. Teil II, S. 53 f.) der Einheitsstab E des Fundamentaldreiecks auf der vierten Graden G_4. Damit aber ist unser Satz bewiesen.

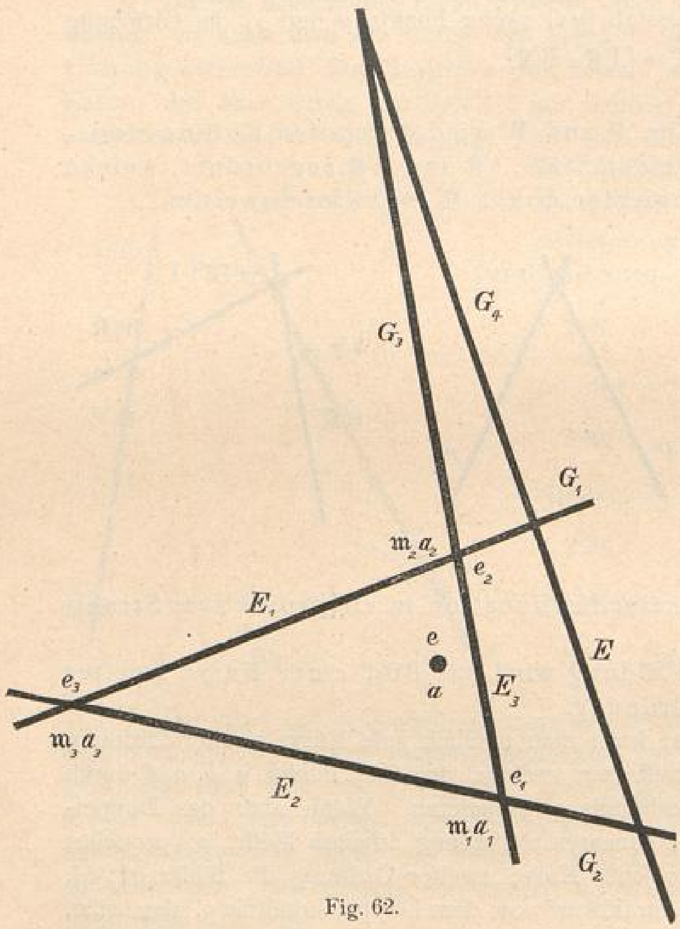


Fig. 62.

Will man jetzt zwei ebene Systeme in der Weise kollinear auf einander beziehen, dafs vier gerade Linien von allgemeiner Lage G_1, G_2, G_3, G_4 in vier andere gerade Linien H_1, H_2, H_3, H_4 derselben Art übergeführt werden (vgl. Fig. 63), so wähle man als Nenner des Kollineationsbruches $\mathfrak{k}$ die soeben charakterisierten Punkte e_i, als Zähler aber diejenigen Punkte b_i, die zu den vier Geraden H in derselben Beziehung stehen wie die e_i zu den vier Geraden G, das heifst, man benutze als Zählerpunkte b_i des Bruches $\mathfrak{k}$ die Schnittpunkte der drei ersten Geraden H_1, H_2, H_3 und bestimme die Massen dieser Punkte in der Weise, dafs der Pol der vierten Geraden H_4 in Bezug auf das Dreieck $b_1\ b_2\ b_3$ der Einheitspunkt b der drei

Punkte b_i wird, und dafs überdies das Produkt $[b_1 b_2 b_3] = 1$ wird. Dann gehört zugleich der Einheitsstab des zweiten Systems

$$B = B_1 + B_2 + B_3$$

der vierten Geraden H_4 an, und es werden somit durch die Kollineation $\mathfrak{K}$ nicht nur die Stäbe E_1, E_2, E_3, die den Geraden G_1, G_2, G_3 angehören, in die Stäbe B_1, B_2, B_3 über-

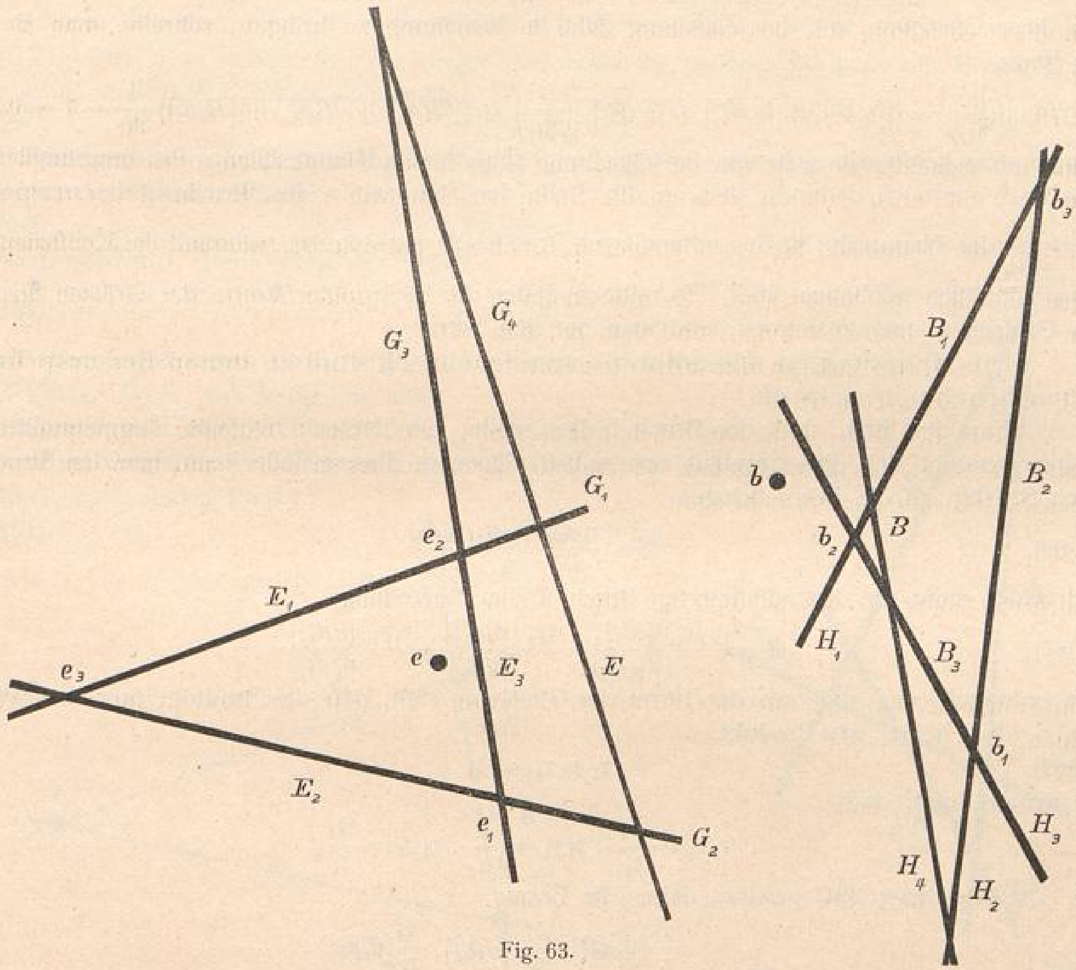


Fig. 63.

geführt, die auf den Geraden H_1, H_2, H_3 liegen, sondern zugleich auch der Stab E der Geraden G_4 in den Stab B der Geraden H_4, das heifst, es wird wirklich durch den Bruch

$$\mathfrak{k} = \frac{b_1,\ b_2,\ b_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

oder auch durch den adjungierten Bruch

$$\mathfrak{K} = \frac{B_1,\ B_2,\ B_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

die gewünschte Zuordnung geleistet. Man hat also den Satz:

Um eine Kollineation in der Ebene festzulegen, kann man vier beliebigen Geraden von allgemeiner Lage vier ebensolche Geraden zuweisen.

Die Frage nach den Doppelgeraden der Kollineation erledigt sich genau ebenso wie die nach den Doppelpunkten (vgl. S. 108 ff.). Aus der Erklärungsgleichung der Doppelgeraden D_i

277) . . . . $D_i \mathfrak{K} = \mathfrak{R}_i D_i$

folgt für die Hauptzahlen $\mathfrak{R}_i$ des adjungierten Bruches $\mathfrak{K}$ die Gleichung dritten Grades

278) . . . . $[(E_1 \mathfrak{R}_i - B_1)(E_2 \mathfrak{R}_i - B_2)(E_3 \mathfrak{R}_i - B_3)] = 0$ oder

$$\mathfrak{R}_i^3 - \{[e_1 B_1] + [e_2 B_2] + [e_3 B_3]\} \mathfrak{R}_i^2 + \{[E_1 b_1] + [E_2 b_2] + [E_3 b_3]\} \mathfrak{R}_i - 1 = 0.$$

Um diese Gleichung mit der Gleichung 266) in Beziehung zu bringen, schreibe man sie in der Form

279) $$\left(\frac{1}{\mathfrak{R}_i}\right)^3 - \{[b_1 E_1] + [b_2 E_2] + [b_3 E_3]\} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_i}\right)^2 + \{[B_1 e_1] + [B_2 e_2] + [B_3 e_3]\} \frac{1}{\mathfrak{R}_i} - 1 = 0.$$

Dann unterscheidet sie sich von der Gleichung 266) für die Hauptzahlen $\mathfrak{r}_i$ des ursprünglichen Bruches $\mathfrak{k}$ nur noch dadurch, dafs an die Stelle der Hauptzahl $\mathfrak{r}_i$ des Bruches $\mathfrak{k}$ der reciproke Wert $\frac{1}{\mathfrak{R}_i}$ der Hauptzahl $\mathfrak{R}_i$ des adjungierten Bruches $\mathfrak{K}$ getreten ist, während die Koeffizienten genau dieselben geblieben sind. Es müssen daher die reciproken Werte der Gröfsen $\mathfrak{R}_i$ mit den Gröfsen $\mathfrak{r}_i$ übereinstimmen, und man hat den Satz:

Die Hauptzahlen des adjungierten Bruches $\mathfrak{K}$ sind zu denen des ursprünglichen Bruches $\mathfrak{k}$ reciprok.

Für den Fall, dafs der Bruch $\mathfrak{k}$ drei reelle, ein Dreieck bildende Doppelpunkte d_i besitzt, versteht sich dies Ergebnis von selbst. Denn in diesem Falle kann man den Bruch $\mathfrak{k}$ (nach S. 103) auf die Form bringen

280) . . . . $$\mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{r}_1 d_1,\ \mathfrak{r}_2 d_2,\ \mathfrak{r}_3 d_3}{d_1,\ d_2,\ d_3}$$

und erhält somit für den adjungierten Bruch $\mathfrak{K}$ die Darstellung

281) . . . . . . $$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 [d_2 d_3],\ \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 [d_3 d_1],\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 [d_1 d_2]}{[d_2 d_3],\ [d_3 d_1],\ [d_1 d_2]}.$$

Nun entnimmt man aber aus der Form der Gleichung 266), dafs das Produkt ihrer drei Wurzeln $\mathfrak{r}_i$, dafs heifst, das Produkt

282) . . . . $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 = 1$

ist, woraus folgt, dafs

$$\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 = \frac{1}{\mathfrak{r}_1},\quad \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 = \frac{1}{\mathfrak{r}_2},\quad \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 = \frac{1}{\mathfrak{r}_3}$$

ist. Die Gleichung 281) gewinnt daher die Form

283) . . . . $$\mathfrak{K} = \frac{\frac{1}{\mathfrak{r}_1}[d_2 d_3],\ \frac{1}{\mathfrak{r}_2}[d_3 d_1],\ \frac{1}{\mathfrak{r}_3}[d_1 d_2]}{[d_2 d_3],\ [d_3 d_1],\ [d_1 d_2]},$$

die das oben für die Hauptzahlen des Bruches $\mathfrak{K}$ gefundene Ergebnis bestätigt und zugleich zeigt, dafs für den Fall dreier reeller, ein Dreieck bildender Doppelpunkte die Doppelgeraden nichts anderes sind als deren gerade Verbindungslinien, was sich ja geometrisch von selbst versteht.

Achter Abschnitt.

Die allgemeine reciproke Verwandtschaft.

In ganz ähnlicher Weise wie die Kollineation läfst sich auch die Verwandtschaft der Reciprocität durch einen Bruch mit drei Nennern und drei Zählern darstellen; nur hat man als Zähler des Bruches anstatt dreier Punkte b_i drei Stäbe B_i zu wählen. Es seien also wie bisher zu Ecken des Fundamentaldreiecks drei vielfache Punkte e_1, e_2, e_3 gemacht, deren äufseres Produkt

284) . . . . $[e_1 e_2 e_3] = 1$

ist, und es seien aus den Grundstäben dieses Dreiecks

285) . . . . $E_1 = [e_2 e_3]$, $E_2 = [e_3 e_1]$, $E_3 = [e_1 e_2]$

mittelst der neun Zahlgröfsen $\mathfrak{b}_{ik}$ drei neue Stäbe abgeleitet

286) . . . . $\begin{cases} B_1 = \mathfrak{b}_{11} E_1 + \mathfrak{b}_{12} E_2 + \mathfrak{b}_{13} E_3 \\ B_2 = \mathfrak{b}_{21} E_1 + \mathfrak{b}_{22} E_2 + \mathfrak{b}_{23} E_3 \\ B_3 = \mathfrak{b}_{31} E_1 + \mathfrak{b}_{32} E_2 + \mathfrak{b}_{33} E_3 \end{cases}$

(vgl. Fig. 64). Das äufsere Produkt dieser drei Stäbe B_i, welches übrigens mit Rücksicht auf die schon mehrfach benutzte Gleichung

287) . . . . $[E_1 E_2 E_3] = 1$

der Determinante $|\mathfrak{b}_{ik}|$ aus den Ableitzahlen $\mathfrak{b}_{ik}$ der B_i gleich sein wird, möge mit $\mathfrak{b}$ bezeichnet werden, das heifst, es möge

288) . . . . $[B_1 B_2 B_3] = \mathfrak{b}$

gesetzt werden.[1]) Dann weist der Bruch

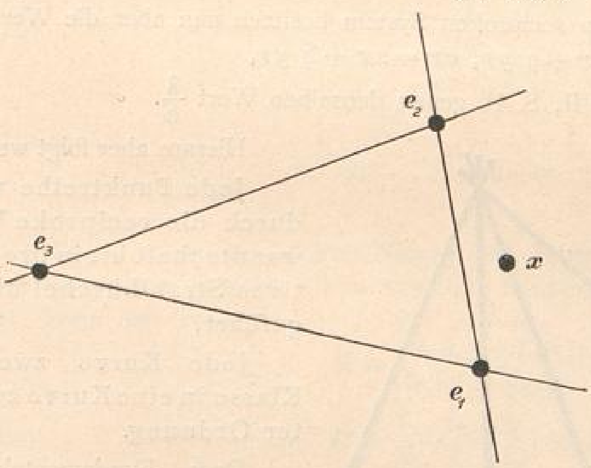
289) . . . . $\boldsymbol{r} = \dfrac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$

nach dem Begriffe des extensiven Bruches seinen drei Nennern e_i die drei Zähler B_i zu, das heifst, es wird

290) . . . . $e_i \boldsymbol{r} = B_i$;

aufserdem aber führt er, falls man auch bei ihm an der Distributivität festhält, einen jeden Punkt

291) . . . . $x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$



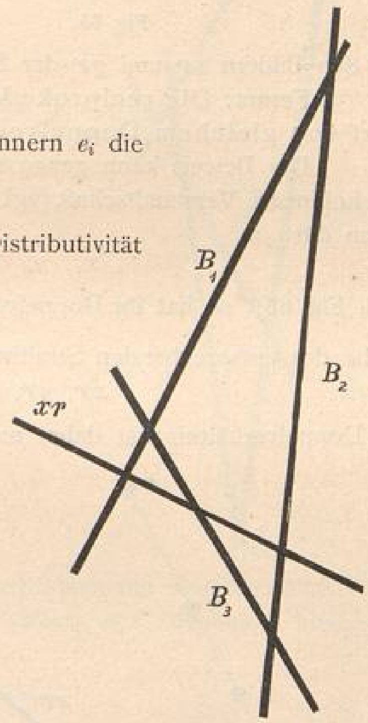


Fig. 64.

der Ebene, der aus den drei Grundpunkten e_i durch die drei Zahlgröfsen $\mathfrak{x}_i$ abgeleitet ist, in denjenigen Stab

292) . . . . $x\boldsymbol{r} = \mathfrak{x}_1 B_1 + \mathfrak{x}_2 B_2 + \mathfrak{x}_3 B_3$

derselben Ebene über, der aus den Bildern B_i der Grundpunkte e_i durch dieselben Zahlgröfsen $\mathfrak{x}_i$ entwickelt wird.

Man erhält so eine Zuordnung der Punkte und Geraden der Ebene, die den Namen reciproke Verwandtschaft oder Reciprocität führt, und die zu der Verwandtschaft der Kollineation

1) Es wird hier davon Abstand genommen, auch das äufsere Produkt der drei Zähler $= 1$ zu setzen, da unten auch ausartende Reciprocitäten betrachtet werden sollen, bei denen jenes Produkt verschwindet, für die also diese Festsetzung nicht zulässig sein würde.

in enger Beziehung steht. In der That findet eine ganze Reihe von Sätzen über kollineare Systeme bei der reciproken Verwandtschaft ihr Analogon. Dahin gehören folgende Sätze:

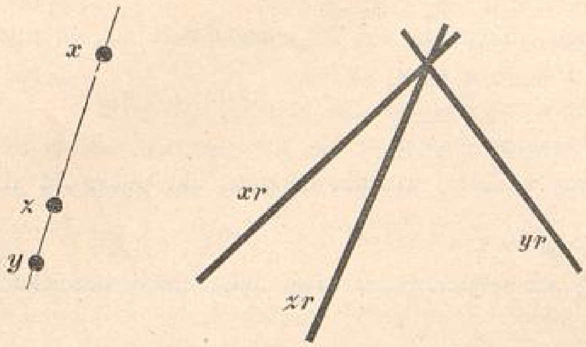


Fig. 65.

Drei Punkten einer Geraden entsprechen im reciproken Systeme drei Geraden, die durch einen Punkt gehen.

Ist nämlich z ein Punkt, der mit den Punkten x und y auf einer Geraden liegt (vgl. Fig. 65), ist also

$$z = \mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y,$$

wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ Zahlgröfsen sind, so wird

$$zr = \mathfrak{x}\, xr + \mathfrak{y}\, yr.$$

Diese Gleichung aber besagt, dafs der Stab zr, der das Bild des Punktes z darstellt, mit den Bildern xr und yr der Punkte x und y durch einen Punkt geht.

Ferner: Die reciproke Verwandtschaft ordnet jedem Punktwurf einen Strahlwurf von gleichem Doppelverhältnis zu.

Der Beweis kann genau so geführt werden, wie bei dem entsprechenden Satze über die kollineare Verwandtschaft (vgl. S. 104). Man stelle wie dort die Punkte des Wurfes in der Form dar

$$x, \quad y, \quad u = x + \mathfrak{g}y, \qquad v = x + \mathfrak{h}y$$

(vgl. Fig. 66), so hat ihr Doppelverhältnis (nach Teil II, S. 38) den Wert $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$; die zugeordneten Stäbe des entsprechenden Strahlwurfes im reciproken System besitzen nun aber die Werte

$$xr, \; yr, \; ur = xr + \mathfrak{g}\, yr, \; vr = xr + \mathfrak{h}\, yr,$$

ihr Doppelverhältnis hat daher nach Teil II, S. 41 genau denselben Wert $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$.

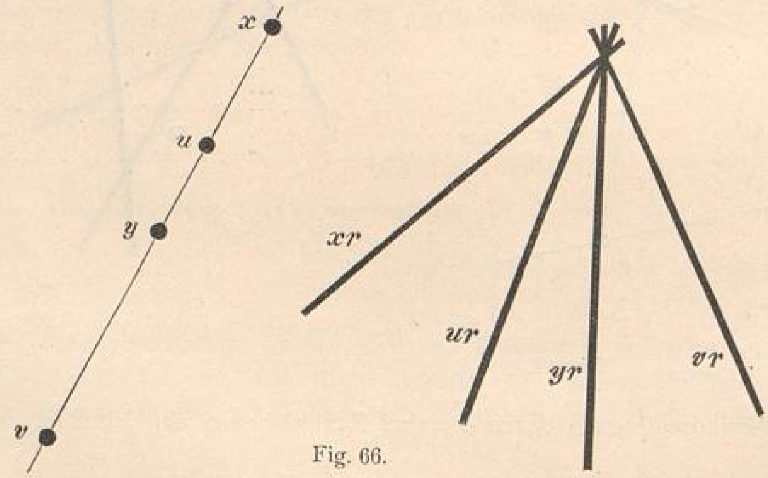


Fig. 66.

Hieraus aber folgt weiter:

Jede Punktreihe wird durch die reciproke Verwandtschaft in ein projektives Strahlbüschel übergeführt,

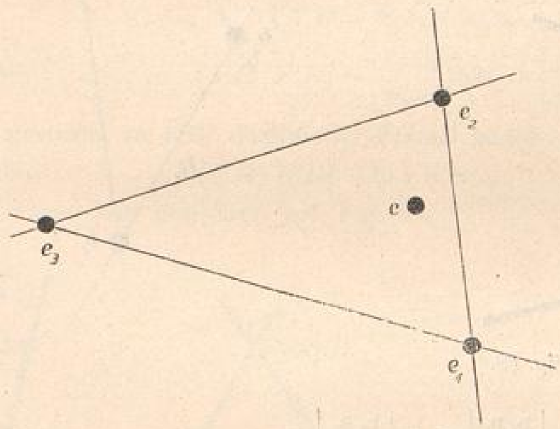
jede Kurve zweiter Klasse in eine Kurve zweiter Ordnung.

Dem Fundamentalsatze der Kollineation endlich entspricht der folgende Fundamentalsatz der reciproken Verwandtschaft:

Um eine Reciprocität in der Ebene festzulegen, kann man vier ihrer Lage nach beliebig gewählten Punkten vier beliebig gegebene Geraden derselben Ebene zuweisen.

In der That braucht man nur drei vielfache Punkte, die mit den drei ersten von den vier Punkten kongruent sind, zu Nennern des Bruches und drei Stäbe, die auf den drei ersten Geraden liegen, zu Zählern des Bruches zu machen und dabei die Massen jener drei Punkte und die Längen dieser drei Stäbe so zu wählen, dafs der vierte von den gegebenen Punkten der Einheitspunkt des Nennersystems und ein Stab der vierten Geraden der Einheitsstab des Zählersystems wird (vgl. Fig. 67). Durch diese Forderungen sind die Massen der drei Nennerpunkte mit Rücksicht auf die Gleichung 284) eindeutig bestimmt. Aber auch die Längen der drei Zählerstäbe sind durch die obigen Bestimmungen wenigstens bis auf einen Proportionalitätsfaktor festgelegt; dieser bleibt willkürlich, da über den Wert des äufseren Produktes $[B_1 B_2 B_3]$ der drei Zähler keine Festsetzung getroffen ist.

Da die Reciprocität $\boldsymbol{r}$ den Punkten *einer Geraden* stets gerade Linien zuweist, die *durch einen Punkt gehen*, so ordnet der Bruch $\boldsymbol{r}$ auch jeder *geraden Linie des ersten Systems einen Punkt des zweiten* zu. Indes wird diese Beziehung der Geraden des ersten Systems auf die Punkte des zweiten durch den Bruch $\boldsymbol{r}$ nur indirekt vermittelt. Man erhält aber auch hier wieder eine direktere Darstellung dieser Abbildung von Geraden auf Punkte, wenn man neben dem Bruche $\boldsymbol{r}$ einen adjun-



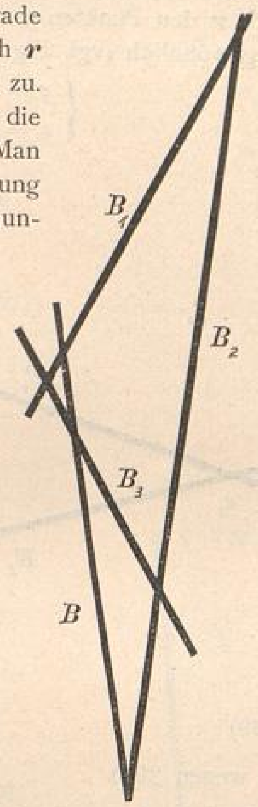


Fig. 67.

gierten Bruch $\boldsymbol{R}$ einführt, dessen Nenner und Zähler die multiplikativen Kombinationen ohne Wiederholung zur zweiten Klasse aus den Nennern und Zählern des Bruches $\boldsymbol{r}$ sind, das heifst, wenn man setzt

293) . . . . $$\boldsymbol{R} = \frac{[B_2 B_3],\ [B_3 B_1],\ [B_1 B_2]}{[e_2 e_3],\ \ [e_3 e_1],\ \ [e_1 e_2]} \text{ oder}$$

294) . . . . $$\boldsymbol{R} = \frac{b_1,\ b_2,\ b_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}, \text{ wo}$$

295) . . . . $$E_1 = [e_2 e_3],\ E_2 = [e_3 e_1],\ E_3 = [e_1 e_2] \text{ und}$$

296) . . . . $$b_1 = [B_2 B_3],\ b_2 = [B_3 B_1],\ b_3 = [B_1 B_2]$$

ist (vgl. Fig. 68). Die Zählerpunkte b_i lassen sich hier übrigens leicht als Vielfachensummen der Grundpunkte e_k darstellen. Dazu führe man in die Gleichungen 296) auf den rechten Seiten die Ausdrücke 286) ein und multipliziere aus unter Berücksichtigung der Gleichungen

297) . . . . . . $$[E_2 E_3] = e_1,\ [E_3 E_1] = e_2,\ [E_1 E_2] = e_3,$$

dann erhält man die Gleichungen:

298) . . . . $$\begin{cases} b_1 = \mathfrak{B}_{11} e_1 + \mathfrak{B}_{12} e_2 + \mathfrak{B}_{13} e_3 \\ b_2 = \mathfrak{B}_{21} e_1 + \mathfrak{B}_{22} e_2 + \mathfrak{B}_{23} e_3 \\ b_3 = \mathfrak{B}_{31} e_1 + \mathfrak{B}_{32} e_2 + \mathfrak{B}_{33} e_3, \end{cases}$$

in denen die $\mathfrak{B}_{ik}$ die Unterdeterminanten der Determinante $\mathfrak{b} = |\mathfrak{b}_{ik}|$ sind.

Um jetzt den Nachweis zu erbringen, dafs der Bruch $\boldsymbol{R}$ wirklich die gewünschte Beziehung zwischen den Geraden des ersten und den Punkten des zweiten Systems herstellt, hat man zu zeigen, dafs der Bruch $\boldsymbol{R}$ den Verbindungsstab $[yz]$ zweier beliebigen Punkte y und z in den Schnittpunkt $[y\boldsymbol{r}\cdot z\boldsymbol{r}]$ derjenigen beiden Stäbe $y\boldsymbol{r}$ und $z\boldsymbol{r}$ überführt, welche durch den Bruch $\boldsymbol{r}$ den Punkten y und z zugewiesen werden. Dazu setze man wie gewöhnlich (vgl. Fig. 69)

$$\begin{cases} y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3 \\ z = \mathfrak{z}_1 e_1 + \mathfrak{z}_2 e_2 + \mathfrak{z}_3 e_3; \text{ dann wird} \end{cases}$$

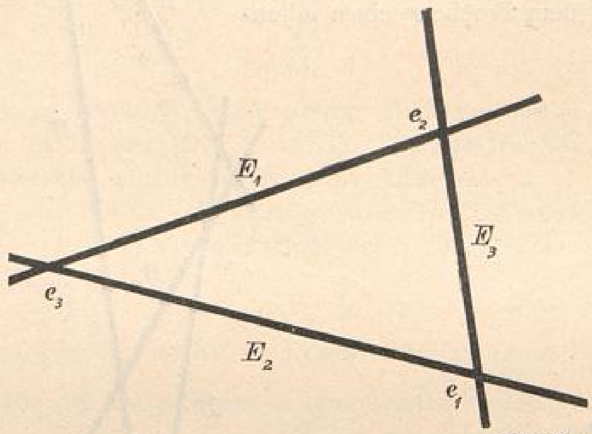
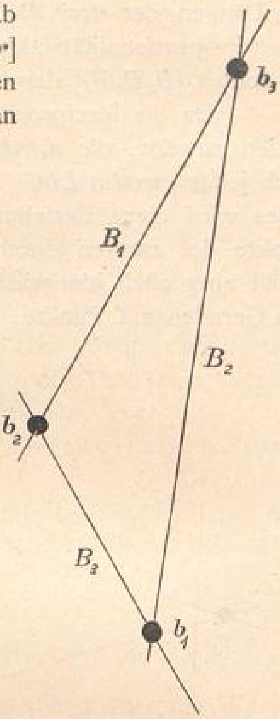


Fig. 68.



$$299) \quad [yz] = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} E_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} E_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} E_3,$$

also wegen 294)

$$300) \quad [yz]\boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} b_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} b_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} b_3.$$

Andererseits wird

$$y\boldsymbol{r} = \mathfrak{y}_1 B_1 + \mathfrak{y}_2 B_2 + \mathfrak{y}_3 B_3,$$
$$z\boldsymbol{r} = \mathfrak{z}_1 B_1 + \mathfrak{z}_2 B_2 + \mathfrak{z}_3 B_3,$$

also mit Rücksicht auf 296)

$$301) \quad [y\boldsymbol{r}\cdot z\boldsymbol{r}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_2 & \mathfrak{y}_3 \\ \mathfrak{z}_2 & \mathfrak{z}_3 \end{vmatrix} b_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_3 & \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{z}_3 & \mathfrak{z}_1 \end{vmatrix} b_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{z}_2 \end{vmatrix} b_3,$$

und es wird daher wirklich

$$302) \quad [y\boldsymbol{r}\cdot z\boldsymbol{r}] = [yz]\boldsymbol{R},$$

das heifst, man hat den Satz:

Der Bruch $\boldsymbol{R}$, der dem Reciprocitätsbruche $\boldsymbol{r}$ adjungiert ist, weist allgemein dem Verbindungsstabe zweier Punkte den Schnittpunkt derjenigen beiden Geraden zu, die diesen beiden Punkten in der Reciprocität $\boldsymbol{r}$ entsprechen.

Es ist ferner von Interesse, die zu 302) dualistische Formel zu entwickeln. Dabei hat man zu beachten, dafs wegen $[e_1 e_2 e_3] = 1$ zwar wie früher

$$303) \quad [E_2 E_3] = e_1,\ [E_3 E_1] = e_2,\ [E_1 E_2] = e_3$$

wird, dafs aber wegen $[B_1 B_2 B_2] = \mathfrak{b}$,

$$[b_2 b_3] = [B_3 B_1 \cdot B_1 B_2] = [B_3 B_1 B_2]\, B_1 \text{ (vgl. Gleich. 105)}$$
$$= [B_1 B_2 B_3]\, B_1 = \mathfrak{b} B_1$$ wird, und Entsprechendes gilt für die beiden andern Produkte $[b_3 b_1]$ und $[b_1 b_2]$. Man erhält also die Formeln

304) . . . . $[b_2 b_3] = \mathfrak{b} B_1,\ [b_3 b_1] = \mathfrak{b} B_2,\ [b_1 b_2] = \mathfrak{b} B_3.$

Sind daher V und W zwei beliebige Stäbe, die aus den Grundstäben E_i durch die Zahlgröfsen $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{w}_i$ abgeleitet sind, das heifst, ist

305) . . . . . . $\begin{cases} V = \mathfrak{v}_1 E_1 + \mathfrak{v}_2 E_2 + \mathfrak{v}_3 E_3 \\ W = \mathfrak{w}_1 E_1 + \mathfrak{w}_2 E_2 + \mathfrak{w}_3 E_3, \end{cases}$

so wird

306) . . . . $[VW] = \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_2 & \mathfrak{v}_3 \\ \mathfrak{w}_2 & \mathfrak{w}_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_3 & \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{w}_3 & \mathfrak{w}_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_2 \\ \mathfrak{w}_1 & \mathfrak{w}_2 \end{vmatrix} e_3,$

also mit Rücksicht auf 289)

307) . . . . . . $[VW]\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_2 & \mathfrak{v}_3 \\ \mathfrak{w}_2 & \mathfrak{w}_3 \end{vmatrix} B_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_3 & \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{w}_3 & \mathfrak{w}_1 \end{vmatrix} B_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_2 \\ \mathfrak{w}_1 & \mathfrak{w}_2 \end{vmatrix} B_3.$

Andererseits wird

$\begin{cases} V\boldsymbol{R} = \mathfrak{v}_1 b_1 + \mathfrak{v}_2 b_2 + \mathfrak{v}_3 b_3 \\ W\boldsymbol{R} = \mathfrak{w}_1 b_1 + \mathfrak{w}_2 b_2 + \mathfrak{w}_3 b_3, \end{cases}$ also wegen 304)

308) . . . . $[V\boldsymbol{R} \cdot W\boldsymbol{R}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_2 & \mathfrak{v}_3 \\ \mathfrak{w}_2 & \mathfrak{w}_3 \end{vmatrix} \mathfrak{b} B_1 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_3 & \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{w}_3 & \mathfrak{w}_1 \end{vmatrix} \mathfrak{b} B_2 + \begin{vmatrix} \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_2 \\ \mathfrak{w}_1 & \mathfrak{w}_2 \end{vmatrix} \mathfrak{b} B_3.$

Die gesuchte zu 303) dualistische Formel lautet somit

309) . . . . $[V\boldsymbol{R} \cdot W\boldsymbol{R}] = \mathfrak{b}[VW]\boldsymbol{r},$

und man erhält den Satz (vgl. Fig. 70):

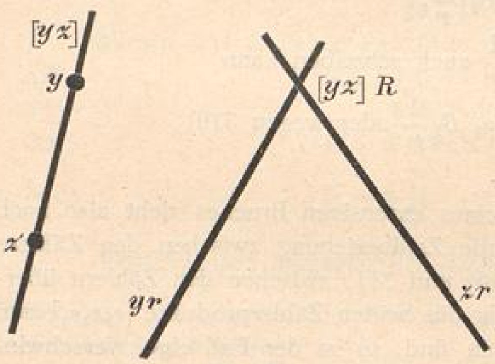


Fig. 69.

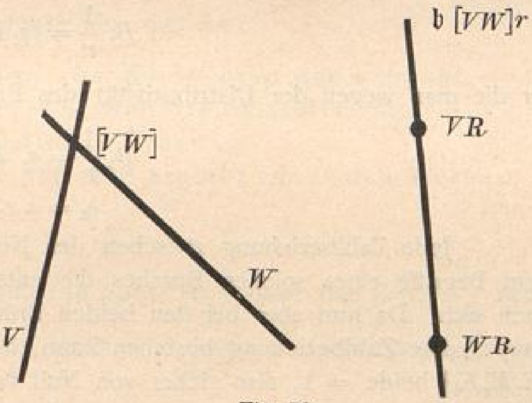


Fig. 70.

Dem Schnittpunkte $[VW]$ zweier Stäbe V und W wird durch den Reciprocitätsbruch $\boldsymbol{r}$ die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte $V\boldsymbol{R}$ und $W\boldsymbol{R}$ zugewiesen, auf welche die Stäbe V und W durch den adjungierten Bruch $\boldsymbol{R}$ abgebildet werden.

Die so gewonnene neue Auffassung der Reciprocität als Stab-Punkt-Zuordnung ergiebt wieder zu jedem Satze über die reciproke Verwandtschaft den dualistisch entsprechenden Satz; insbesondere erhält man die Sätze:

Jeder Strahlwurf wird durch die Reciprocität in einen Punktwurf von gleichem Doppelverhältnis abgebildet,

jedes Strahlbüschel in eine projektive Punktreihe,

jede Kurve zweiter Ordnung in eine Kurve zweiter Klasse.

Die Einführung der Brüche

310) . . . . $\frac{1}{r} = \frac{e_1, e_2, e_3}{B_1, B_2, B_3}$ und 311) . . . . $\frac{1}{R} = \frac{E_1, E_2, E_3}{b_1, b_2, b_3}$

für die zur Verwandtschaft r, R inverse Verwandtschaft mufs an die Bedingung geknüpft werden, dafs die beiden äufseren Produkte ihrer drei Nenner von Null verschieden seien.

Denn wäre zum Beispiel das Produkt der drei Nenner des Bruches $\frac{1}{r}$, das heifst das Produkt $[B_1 B_2 B_3] = 0$, also nach 288) $\mathfrak{b} = 0$, so würde zwischen den Nennern B_i dieses Bruches eine Zahlbeziehung bestehen müssen. Eine solche Zahlbeziehung zwischen den Nennern eines extensiven Bruches, dessen Zähler linear unabhängig sind, widerspricht aber dem Begriffe des extensiven Bruches. Ein solcher Bruch nämlich sollte nach seiner Erklärung *erstens* seinen drei Nennern die drei Zähler zuweisen und *zweitens* bei der Multiplikation mit einer Vielfachensumme aus den drei Nennern distributiv sein. Diese beiden Eigenschaften aber sind nicht mit einander vereinbar, sobald zwischen den Nennern eine Zahlbeziehung herrscht, der nicht die entsprechende Zahlbeziehung zwischen den Zählern zur Seite steht. Aus einer zwischen den Nennern des Bruches $\frac{1}{r}$ obwaltenden Zahlbeziehung

$$B_3 = \mathfrak{g}_1 B_1 + \mathfrak{g}_2 B_2$$

würde nämlich durch Multiplikation mit dem Bruche $\frac{1}{r}$ die Gleichung folgen

$$B_3 \frac{1}{r} = (\mathfrak{g}_1 B_1 + \mathfrak{g}_2 B_2) \frac{1}{r},$$

für die man wegen der Distributivität des Bruches $\frac{1}{r}$ auch schreiben kann

$$B_3 \frac{1}{r} = \mathfrak{g}_1 \; B_1 \frac{1}{r} + \mathfrak{g}_2 \; B_2 \frac{1}{r} \text{ oder wegen 310)}$$

$$e_3 = \mathfrak{g}_1 e_1 + \mathfrak{g}_2 e_2.$$

Jede Zahlbeziehung zwischen den Nennern eines extensiven Bruches zieht also nach dem Begriffe eines solchen Bruches die entsprechende Zahlbeziehung zwischen den Zählern nach sich. Da nun aber bei den beiden Brüchen 310) und 311) zwischen den Zählern überhaupt keine Zahlbeziehung bestehen kann, insofern ja die beiden Zählerprodukte $[e_1 e_2 e_3]$ und $[E_1 E_2 E_3]$ beide $= 1$, also sicher von Null verschieden sind, so ist der Fall eines verschwindenden Nennerproduktes ganz von der Betrachtung auszuschliefsen.

Von den beiden sich so ergebenden Bedingungen $[B_1 B_2 B_3] \gtrless 0$ und $[b_1 b_2 b_3] \gtrless 0$ ist übrigens jede eine Folge der andern; denn es wird nach 304), 61), 296) und 288)

$$[b_1 b_2 b_3] = \mathfrak{b}[B_3 b_3] = \mathfrak{b}[b_3 B_3] = \mathfrak{b}[B_1 B_2 B_3], \text{ also}$$

312) . . . . $[b_1 b_2 b_3] = \mathfrak{b}^2 = [B_1 B_2 B_3]^2.$

Ist aber die für die Existenz der Brüche $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{R}$ erforderliche Bedingung $\mathfrak{b} \gtrless 0$ erfüllt, so sind diese Brüche, wie ihre Form zeigt, ebenso wie die Brüche r und R, Ausdrücke einer gewissen Reciprocität, und zwar ist der Bruch $\frac{1}{r}$ der Ausdruck für die zur Verwandtschaft r inverse Stab-Punkt-Zuordnung und der Bruch $\frac{1}{R}$ der Ausdruck für die zur Verwandtschaft R inverse Punkt-Stab-Zuordnung. In der That wird die durch den Bruch r bewirkte Abbildung durch den Bruch $\frac{1}{r}$ wieder rückgängig gemacht und umgekehrt, und Entsprechendes gilt von den Brüchen R und $\frac{1}{R}$; das heifst, es bestehen die Gleichungen

313) . . . . . $xr \cdot \frac{1}{r} = x$ 314) . . . . . $U\frac{1}{r} \cdot r = U$

315) . . . . . $UR\frac{1}{R} = U$ 316) . . . . . $x\frac{1}{R} \cdot R = x.$

Diesen Beziehungen kann man aber noch eine andere Form verleihen. Setzt man nämlich

317) . . . . . . $xr = U$, so nimmt die Gleichung 313) die Form an

318) . . . . . . $x = U\frac{1}{r}$, und man hat den Satz:

Wenn das äufsere Produkt der Zähler von r, das heifst das Produkt

319) . . . . . . $[B_1 B_2 B_3] \gtrless 0$ ist oder, was nach 288) dasselbe ist,

320) . . . . $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist, so ist die Gleichung

317) . . . . . . $xr = U$ nach x auflösbar und ergiebt für x den Werth

318) . . . . . . $x = U\frac{1}{r}$.

Verschwindet hingegen das äufsere Produkt der drei Zähler von r, so verliert der Bruch $\frac{1}{r}$ seine Bedeutung. Bei gegebenem U und r wird alsdann durch die Gleichung 317) der Punkt x noch nicht eindeutig bestimmt.

Setzt man andererseits

321) . . . . . $UR = x$, so verwandelt sich die Gleichung 315) in

322) . . . . . . $U = x\frac{1}{R}$, und man erhält also den Satz:

Wenn das äufsere Produkt der Zähler von R, das heifst das Produkt

323) . . . . . . $[b_1 b_2 b_3] \gtrless 0$ ist oder, was nach 312) dasselbe ist,

324) . . . . $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist, so ist die Gleichung

321) . . . . . $UR = x$ nach U auflösbar, und ergiebt für U den Wert

322) . . . . . . $U = x\frac{1}{R}$.

Verschwindet hingegen das äufsere Produkt $[b_1 b_2 b_3]$, so verliert der Bruch $\frac{1}{R}$ seine Bedeutung. Bei gegebenem x und R wird alsdann der Stab U durch die Gleichung 321) noch nicht eindeutig bestimmt.

Von den vier Brüchen r und $\frac{1}{R}$, R und $\frac{1}{r}$ sind daher die beiden ersten und die beiden letzten gleichartige Gröfsen. Der Bruch $\frac{1}{R}$ insbesondere hat es mit dem Bruche r gemein, dafs er wie dieser eine Reciprocität darstellt, aufgefafst als Punkt-Stab-Zuordnung. Aber trotzdem sind diese beiden Reciprocitäten *im allgemeinen keineswegs mit einander identisch* oder auch nur bis auf einen Zahlfaktor einander gleich. Dies erkennt man sofort, wenn man die drei Stäbe bestimmt, die durch *den einen* Bruch $\frac{1}{R} = \frac{E_1,\ E_2,\ E_3}{b_1,\ b_2,\ b_3}$ den Nennerpunkten e_i *des andern* Bruches $r = \frac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$ zugewiesen werden, und die Ausdrücke für diese Stäbe mit denen für die Stäbe $e_i r = B_i$ vergleicht, in welche dieselben Punkte e_i durch den Bruch r übergeführt werden, das heifst nach 286) mit den Ausdrücken

325) . . . . $e_i = \mathfrak{b}_{i1} E_1 + \mathfrak{b}_{i2} E_2 + \mathfrak{b}_{i3} E_3$.

Dazu stelle man zunächst die Nenner e_i des Bruches r als Vielfachensummen der Nenner b_k des Bruches $\frac{1}{R}$ dar. Nach 298) bestehen zwischen den b_k und e_i die Gleichungen

$$b_1 = \mathfrak{B}_{11} e_1 + \mathfrak{B}_{12} e_2 + \mathfrak{B}_{13} e_3$$
$$b_2 = \mathfrak{B}_{21} e_1 + \mathfrak{B}_{22} e_2 + \mathfrak{B}_{23} e_3$$
$$b_3 = \mathfrak{B}_{31} e_1 + \mathfrak{B}_{32} e_2 + \mathfrak{B}_{33} e_3.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen mit den Faktoren $\mathfrak{b}_{1i}$, $\mathfrak{b}_{2i}$, $\mathfrak{b}_{3i}$, addiert und berücksichtigt die aus der Theorie der Determinanten bekannten Gleichungen

326) . . . . $\mathfrak{b}_{1i}\mathfrak{B}_{1i} + \mathfrak{b}_{2i}\mathfrak{B}_{2i} + \mathfrak{b}_{3i}\mathfrak{B}_{3i} = \mathfrak{b}$ und

327) . . . . $\mathfrak{b}_{1i}\mathfrak{B}_{1k} + \mathfrak{b}_{2i}\mathfrak{B}_{2k} + \mathfrak{b}_{3i}\mathfrak{B}_{3k} = 0, \quad i \gtrless k,$

so erhält man

$$\mathfrak{b} e_i = \mathfrak{b}_{1i} b_1 + \mathfrak{b}_{2i} b_2 + \mathfrak{b}_{3i} b_3, \text{ also}$$

328) . . . . $e_i = \frac{1}{\mathfrak{b}} (\mathfrak{b}_{1i} b_1 + \mathfrak{b}_{2i} b_2 + \mathfrak{b}_{3i} b_3).$

Man bekommt daher für die drei Stäbe, welche durch den Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ den Nennern e_i des Bruches $\boldsymbol{r}$ zugewiesen werden, mit Rücksicht auf 311) die Ausdrücke

329) . . . . $e_i \frac{1}{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{\mathfrak{b}} (\mathfrak{b}_{1i} E_1 + \mathfrak{b}_{2i} E_2 + \mathfrak{b}_{3i} E_3),$

die sich von den Ausdrücken 325) für die Stäbe $e_i \boldsymbol{r}$ aufser durch den Zahlfaktor $\frac{1}{\mathfrak{b}}$ noch dadurch unterscheiden, dafs die Ableitzahlen in der Klammer gegen die Ableitzahlen der Stäbe $e_i \boldsymbol{r}$ transponiert sind. Die Geraden der Stäbe $e_i \boldsymbol{r}$ und $e_i \frac{1}{\boldsymbol{R}}$ sind daher im allgemeinen von einander verschieden, das heifst, es werden einem jeden von den drei Grundpunkten und somit überhaupt jedem Punkte der Ebene im allgemeinen *zwei auch ihrer Lage nach verschiedene* Stäbe zugeordnet sein, je nachdem man jenen Punkt als Punkt des ersten oder des zweiten Systems auffafst und also zu seiner Abbildung den Bruch $\boldsymbol{r}$ oder den Bruch $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ verwendet.

Insbesondere werden auch jedem *unendlich fernen* Punkte der Ebene im allgemeinen zwei verschiedene Stäbe entsprechen, und diese Stäbe gruppieren sich, falls man sämtliche unendlich fernen Punkte abbildet, zu zwei Strahlbüscheln. Wie schon oben bei der Kollineation gezeigt wurde, lassen sich nämlich die unendlich fernen Punkte, das heifst die Strecken g der Ebene, sämtlich aus zwei Grundstrecken, etwa aus den Strecken

330) . . . . $g_1 = \frac{e_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3}, \quad g_2 = \frac{e_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3},$

numerisch ableiten, also unter der Form

331) . . . . $g = \mathfrak{g}_1 g_1 + \mathfrak{g}_2 g_2$

darstellen. Fafst man diese Strecken als Elemente des ersten Systems auf, so werden sie durch den Bruch $\boldsymbol{r}$ in die Stäbe

332) . . . . $g\boldsymbol{r} = \mathfrak{g}_1 \; g_1 \boldsymbol{r} + \mathfrak{g}_2 \; g_2 \boldsymbol{r}$

übergeführt. Den unendlich fernen Punkten (den Strecken) des ersten Systems entsprechen daher wirklich die Stäbe eines Strahlbüschels. Der Scheitel dieses Strahlbüschels, dafs heifst der Punkt

333) . . . . $t = [g_1 \boldsymbol{r} \cdot g_2 \boldsymbol{r}]$

möge der **Mittelpunkt des zweiten Systems** genannt werden.

Betrachtet man dagegen die unendlich fernen Punkte, das heifst die Strecken g der Ebene, als Elemente des zweiten Systems, bezeichnet sie als solche mit dem Buchstaben h und benutzt als Grundstrecken dieses Systems die Strecken

334) . . . . $h_1 = \frac{b_1}{\mathfrak{n}_1} - \frac{b_3}{\mathfrak{n}_3}, \quad h_2 = \frac{b_2}{\mathfrak{n}_2} - \frac{b_3}{\mathfrak{n}_3},$

wo die Nenner $\mathfrak{n}_i$ die Massen der Punkte b_i bezeichen, so wird

335) . . . . $h = \mathfrak{h}_1 h_1 + \mathfrak{h}_2 h_2.$

Für die Stäbe des ersten Systems, welche diesen Punkten h entsprechen, bekommt man also die Darstellung

336) . . . . $h\frac{1}{R} = \mathfrak{h}_1\, h_1 \frac{1}{R} + \mathfrak{h}_2\, h_2 \frac{1}{R},$

aus der für den Scheitel des von ihnen beschriebenen Strahlbüschels, das heifst für den Mittelpunkt s des ersten Systems, der Wert hervorgeht

337) . . . . $s = \left[h_1 \frac{1}{R} \cdot h_2 \frac{1}{R}\right].$

Nebenbei entnimmt man noch aus der Thatsache, dafs die Reciprocitäten r und $\frac{1}{R}$ die unendlich fernen Punkte der Ebene in Stäbe eines Strahlbüschels überführen, also in derselben Weise umwandeln wie die Punkte einer Geraden, dafs es auch bei der Betrachtung reciproker Systeme vorteilhaft sein wird, sich die unendlich fernen Elemente auf einer Geraden vereinigt zu denken und ebenso wie bei der kollinearen Verwandtschaft von der *unendlich fernen Geraden der Ebene* zu sprechen.

Übrigens lassen sich die beiden Mittelpunkte s und t der beiden Systeme auch leicht als Vielfachensummen der Grundpunkte darstellen. Für die den Strecken g_1 und g_2 des ersten Systems zugeordneten Stäbe $g_1 r$ und $g_2 r$ ergeben sich nämlich aus 330) und 289) die Werte

338) . . . . $g_1 r = \frac{B_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{B_3}{\mathfrak{m}_3}, \quad g_2 r = \frac{B_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{B_3}{\mathfrak{m}_3}.$

Man erhält also für den Mittelpunkt des zweiten Systems nach 333) die Darstellung

339) . . . $t = \left[\left(\frac{B_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{B_3}{\mathfrak{m}_3}\right)\left(\frac{B_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{B_3}{\mathfrak{m}_3}\right)\right] = \frac{[B_2 B_3]}{\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3} + \frac{[B_3 B_1]}{\mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1} + \frac{[B_1 B_2]}{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2}$

oder wegen 296)

340) . . . . $t = \frac{\mathfrak{m}_1 b_1 + \mathfrak{m}_2 b_2 + \mathfrak{m}_3 b_3}{\mathfrak{m}_1\, \mathfrak{m}_2\, \mathfrak{m}_3}.$

Entsprechend findet man für den Mittelpunkt s des ersten Systems den Ausdruck

341) . . . . $s = \frac{\mathfrak{n}_1 e_1 + \mathfrak{n}_2 e_2 + \mathfrak{n}_3 e_3}{\mathfrak{n}_1\, \mathfrak{n}_2\, \mathfrak{n}_3},$

in dem die Zahlgröfsen $\mathfrak{n}_i$ die Massen der Punkte b_i bedeuten. Aus der allgemeinen Massenformel 181) folgen daher für sie mit Rücksicht auf 298) die Werte

342) . . . . $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{B}_{i1}\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{B}_{i2}\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{B}_{i3}\mathfrak{m}_3.$

Neunter Abschnitt.

Das Polarsystem.

Die Beziehung zwischen den beiden Ausdrücken 325) und 329) für die den Grundpunkten e_i im zweiten und ersten System zugeordneten Geraden tritt noch etwas deutlicher hervor, wenn man anstatt des Bruches $\frac{1}{R}$ den von ihm nur um den konstanten Zahlfaktor $\mathfrak{b}$ verschiedenen Bruch $\frac{\mathfrak{b}}{R}$ verwendet, der ja geometrisch dieselbe Reciprocität definiert wie der Bruch $\frac{1}{R}$, nur dafs alle Stäbe gegen die entsprechenden Stäbe der Verwandtschaft $\frac{1}{R}$ noch mit einem konstanten Zahlfaktor $\mathfrak{b}$ multipliziert erscheinen. Für diesen Bruch gelten die Gleichungen

343) . . . . $e_i \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}} = \mathfrak{b}_{1i} E_1 + \mathfrak{b}_{2i} E_2 + \mathfrak{b}_{3i} E_3.$

Die Ausdrücke für die so gewonnenen Stäbe $e_i \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}}$ unterscheiden sich daher von den für die Stäbe $e_i \boldsymbol{r}$ in 325) angegebenen Werten nur noch dadurch, dafs ihre Ableitzahlen gegen die der Stäbe $e_i \boldsymbol{r}$ transponiert sind. Sollte daher allgemein für jeden Wert von i und k

344) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$

sein, so werden die beiden Ausdrücke 325) und 343) identisch, das heifst, es wird

345) . . . . $e_i \boldsymbol{r} = e_i \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}} \quad i = 1, 2, 3;$

und somit wird auch allgemein für jeden beliebigen Punkt x

346) . . . . $x\boldsymbol{r} = x \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}}.$

Man kann daher auch die Brüche $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}}$ selbst einander gleich setzen und erhält so die Gleichung

347) . . . . $\boldsymbol{r} = \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}}$ und damit den Satz:

Eine reciproke Verwandtschaft $\boldsymbol{r}$, deren Ableitzahlen den drei Bedingungen $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$ Genüge leisten, stimmt bis auf einen Zahlfaktor $\mathfrak{b}$ mit dem reciproken Werte der adjungierten Verwandtschaft $\boldsymbol{R}$ überein.

Diesem Ergebnis kann man noch eine andere Fassung geben. Multipliziert man nämlich die Gleichung 346) mit $\boldsymbol{R}$, so erhält man

$$x\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{R} = x \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R}$$

oder mit Rücksicht auf 316)

348) . . . . $x\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{R} = \mathfrak{b}x.$

Diese Gleichung besagt:

Eine reciproke Verwandtschaft $\boldsymbol{r}$, deren Ableitzahlen den drei Bedingungen $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$ genügen, hat die Eigenschaft, dafs jeder Stab $x\boldsymbol{r}$, der aus einem beliebigen Punkte x vermöge der Verwandtschaft $\boldsymbol{r}$ hervorgeht, durch die adjungierte Verwandtschaft $\boldsymbol{R}$ in den mit dem Punkte x kongruenten Punkt $\mathfrak{b}x$ übergeführt wird.

Wegen dieser Eigenschaft nennt man eine reciproke Verwandtschaft, deren Ableitzahlen den Gleichungen $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$ genügen, involutorisch und benutzt für eine solche involutorische Reciprocität noch den besonderen Namen „Polarreciprocität". Ferner sagt man von den beiden Systemen, die einander durch eine Polarreciprocität zugewiesen werden, sie bilden zusammen ein Polarsystem. Auch bezeichnet man wohl die *Verwandtschaft selbst* als ein Polarsystem. Zur Unterscheidung von der allgemeinen Reciprocität $\boldsymbol{r}$, wollen wir für den Verwandtschaftsbruch eines solchen Polarsystems den besonderen Buchstaben $\boldsymbol{p}$ einführen und für den adjungierten Bruch den Buchstaben $\boldsymbol{P}$.

Man nennt ferner die einem beliebigen Punkte x in einem Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ zugeordnete Gerade $x\boldsymbol{p}$ die Polare des Punktes x in dem Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ und umgekehrt den einer beliebigen Geraden U zugeordneten Punkt $U\boldsymbol{P}$ den Pol der Geraden U in dem Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$.

Die Brüche $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{P}$ für das Polarsystem genügen zunächst selbstverständlich allen denjenigen Formeln, die oben für eine *beliebige* Reciprocität entwickelt sind. Der Übersicht wegen seien sie hier unter Benutzung der neuen Bezeichnung noch einmal zusammen gestellt. Es sind die Formeln:

349) . . . $\boldsymbol{p} = \dfrac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$, 350) . . . $\boldsymbol{P} = \dfrac{b_1,\ b_2,\ b_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$,

351) . . $e_i \boldsymbol{p} = B_i$, 352) . . $E_i \boldsymbol{P} = b_i$,

353) . . . $\dfrac{1}{\boldsymbol{p}} = \dfrac{e_1,\ e_2,\ e_3}{B_1,\ B_2,\ B_3}$, 354) . . . $\dfrac{1}{\boldsymbol{P}} = \dfrac{E_1,\ E_2,\ E_3}{b_1,\ b_2,\ b_3}$,

355) . . $B_i \dfrac{1}{\boldsymbol{p}} = e_i$, 356) . . $b_i \dfrac{1}{\boldsymbol{P}} = E_i$,

357) . . . . . . $E_1 = [e_2 e_3]$, $E_2 = [e_3 e_1]$, $E_3 = [e_1 e_2]$,

358) . . . . . . $b_1 = [B_2 B_3]$, $b_2 = [B_3 B_1]$, $b_3 = [B_1 B_2]$,

359) . . $[e_1 e_2 e_3] = 1$, 360) . . $[E_1 E_2 E_3] = 1$,

361) . . $[e_i E_i] = [E_i e_i] = 1$, 362) . . $[e_i E_k] = [E_k e_i] = 0$, $i \gtrless k$,

363) . . . . $B_i = \mathfrak{b}_{i1} E_1 + \mathfrak{b}_{i2} E_2 + \mathfrak{b}_{i3} E_3$,

364) . . . . $b_i = \mathfrak{B}_{i1} e_1 + \mathfrak{B}_{i2} e_2 + \mathfrak{B}_{i3} e_3$,

wo die $\mathfrak{B}_{ik}$ die Unterdeterminanten der Determinante

$\mathfrak{b} = |\mathfrak{b}_{ik}|$ sind.

365) . . $[B_1 B_2 B_3] = |\mathfrak{b}_{ik}| = \mathfrak{b}$, 366) . . $[b_1 b_2 b_3] = |\mathfrak{B}_{ik}| = \mathfrak{b}^2$,

367) . . . . . $[E_2 E_3] = e_1$, $[E_3 E_1] = e_2$, $[E_1 E_2] = e_3$,

368) . . . . . $[b_2 b_3] = \mathfrak{b} B_1$, $[b_3 b_1] = \mathfrak{b} B_2$, $[b_1 b_2] = \mathfrak{b} B_3$.

Aus den letzten Gleichungen folgt noch, dafs *der adjungierte Bruch des adjungierten Bruches* $\boldsymbol{P}$, das heifst der Bruch

369) . . . . $\overline{\boldsymbol{p}} = \dfrac{[b_2\ b_3],\ [b_3\ b_1],\ [b_1\ b_2]}{[E_2 E_3],\ [E_3 E_1],\ [E_1 E_2]}$,

sich von dem ursprünglichen Bruche $\boldsymbol{p}$ (vgl. Gl. 349) im Allgemeinen (so lange nämlich $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist) nicht wesentlich unterscheidet; denn er läfst sich auch in der Form schreiben

370) . . . . $\overline{\boldsymbol{p}} = \mathfrak{b} \dfrac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$,

und es wird also

371) . . . . $\overline{\boldsymbol{p}} = \mathfrak{b}\boldsymbol{p}$.

Weiter wird:

372) . . $[y\boldsymbol{p} \cdot z\boldsymbol{p}] = [yz]\boldsymbol{P}$, 373) . $[V\boldsymbol{P} \cdot W\boldsymbol{P}] = \mathfrak{b}[VW]\boldsymbol{p}$,

374) . . $x\boldsymbol{p} \cdot \dfrac{1}{\boldsymbol{p}} = x$, 375) . . $U \dfrac{1}{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{p} = U$,

376) . . $U\boldsymbol{P} \cdot \dfrac{1}{\boldsymbol{P}} = U$, 377) . . $x \dfrac{1}{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{P} = x$.

Wenn ferner

378) . . . . $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist, so ist die Gleichung

379) . . . . $x\boldsymbol{p} = U$

nach x auflösbar und ergiebt für x den Wert

380) . . . . $x = U \dfrac{1}{\boldsymbol{p}}$,

und andererseits ist unter derselben Bedingung die Gleichung

381) . . . . $U\boldsymbol{P} = x$

nach U auflösbar und liefert für U den Wert

382) . . . . $U = x \dfrac{1}{\boldsymbol{P}}$.

Zu diesen Formeln, welche sämtlich auch noch für jede beliebige Reciprocität gelten, treten nun weiter diejenigen Formeln hinzu, *die dem Polarsystem eigentümlich sind*, also zunächst die Bedingungsgleichungen des Polarsystems

383) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$, aus denen noch folgt, dafs auch

384) . . . . , . $\mathfrak{B}_{ik} = \mathfrak{B}_{ki}$ ist. Ferner die oben aus 383) abgeleitete Formel

385) . . $\boldsymbol{p} = \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{P}}$, für die man auch schreiben kann 386) $\boldsymbol{P} = \frac{\mathfrak{b}}{\boldsymbol{p}}$ oder

387) . . $\frac{1}{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{p}}{\mathfrak{b}}$ und 388) $\frac{1}{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{P}}{\mathfrak{b}}$.

Endlich die Formeln, die den involutorischen Charakter des Polarsystems ausdrücken, nämlich die Formel

389) . . . . $x\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{P} = \mathfrak{b}x$,

und andererseits die aus 375) und 388) entspringende Formel

390) . . . . $U\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{p} = \mathfrak{b}U$.

Von diesen beiden Formeln zeigt nämlich die erste: Wenn U die Polare von x, also $U = x\boldsymbol{p}$ ist, so ist zugleich x der Pol von U; denn es ist ja zufolge 389) dann $U\boldsymbol{P} = \mathfrak{b}x$. Und umgekehrt zeigt die zweite Formel (390): Wenn x der Pol von U, also $x = U\boldsymbol{P}$ ist, so ist zugleich U die Polare von x; denn es ist ja nach 390) dann $x\boldsymbol{p} = \mathfrak{b}U$.

Man kann übrigens den Bedingungsgleichungen 383) des Polarsystems durch Einführung der Grundpunkte e_i und ihrer Polaren B_i noch eine andere Form geben, die für geometrische Folgerungen vielfach geeigneter ist. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 363) 361) und 362) wird nämlich

391) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = [e_k B_i]$ oder wegen 351)

392) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = [e_k \cdot e_i \boldsymbol{p}]$.

Die Bedingungsgleichungen 383) verwandeln sich daher in die Gleichungen

393) . . . . $[e_k \cdot e_i \boldsymbol{p}] = [e_i \cdot e_k \boldsymbol{p}]$.

Diese Gleichungen, welche eine Beziehung zwischen je zwei Grundpunkten e_i und e_k und ihren Polaren $e_i\boldsymbol{p}$ und $e_k\boldsymbol{p}$ enthalten, sind um so wichtiger, als sich aus ihnen die entsprechende Beziehung für irgend zwei beliebige Punkte y und z und ihre Polaren $y\boldsymbol{p}$ und $z\boldsymbol{p}$ ableiten läfst. Dazu führe man in den Ausdruck $[z \cdot y\boldsymbol{p}]$ für die Punkte z und y ihre Ableitausdrücke

$$z = \sum_1^3{}^i \mathfrak{z}_i e_i \quad \text{und} \quad y = \sum_1^3{}^k \mathfrak{y}_k e_k \text{ ein und bekommt so}$$

$$\begin{aligned}
[z \cdot y\boldsymbol{p}] &= \left[\left(\sum_1^3{}^i \mathfrak{z}_i e_i\right) \cdot \left(\sum_1^3{}^k \mathfrak{y}_k e_k\right)\boldsymbol{p}\right] \\
&= \left[\left(\sum_1^3{}^i \mathfrak{z}_i e_i\right) \cdot \left(\sum_1^3{}^k \mathfrak{y}_k e_k \boldsymbol{p}\right)\right] \\
&= \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k \mathfrak{z}_i \mathfrak{y}_k [e_i \cdot e_k \boldsymbol{p}], \text{ das heifst wegen 393)} \\
&= \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k \mathfrak{z}_i \mathfrak{y}_k [e_k \cdot e_i \boldsymbol{p}] \\
&= \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^i \mathfrak{y}_k \mathfrak{z}_i [e_k \cdot e_i \boldsymbol{p}] \\
&= [y \cdot z\boldsymbol{p}].
\end{aligned}$$

Es besteht also wirklich für beliebige Punkte y und z die Gleichung

394) . . . . $[z \cdot y\boldsymbol{p}] = [y \cdot z\boldsymbol{p}]$;

sie möge die erste Grundgleichung des Polarsystems heifsen. Aus ihr folgt insbesondere, dafs mit der Gleichung

$$[z \cdot y\boldsymbol{p}] = 0 \quad \text{stets die Gleichung} \quad [y \cdot z\boldsymbol{p}] = 0$$

verknüpft ist, und damit der Satz:

Wenn z auf der Polare eines Punktes y liegt, so liegt auch y auf der Polare des Punktes z (vgl. Fig. 71).

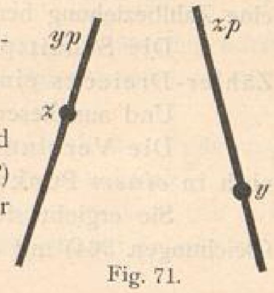


Fig. 71.

Eine andere geometrische Folgerung ergiebt sich aus den Definitionsgleichungen des Polarsystems

383) $$\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki},$$

wenn man nach den Beziehungen fragt, die zwischen den Zähler- und Nenner-Dreiecken des Bruches $\boldsymbol{p}$ (also auch des adjungierten Bruches $\boldsymbol{P}$) herrschen (vgl. Fig. 72). Dazu bestimme man die Schnittpunkte der Stäbe E_i und B_i von gleichem Index und erhält

$$[E_1 B_1] = \mathfrak{b}_{12}[E_1 E_2] + \mathfrak{b}_{13}[E_1 E_3]$$

oder wegen 88) und 367)

395) $$\begin{cases} [E_1 B_1] = \mathfrak{b}_{12} e_3 - \mathfrak{b}_{13} e_2 \quad \text{und entsprechend} \\ [E_2 B_2] = \mathfrak{b}_{23} e_1 - \mathfrak{b}_{21} e_3 \\ [E_3 B_3] = \mathfrak{b}_{31} e_2 - \mathfrak{b}_{32} e_1 . \end{cases}$$

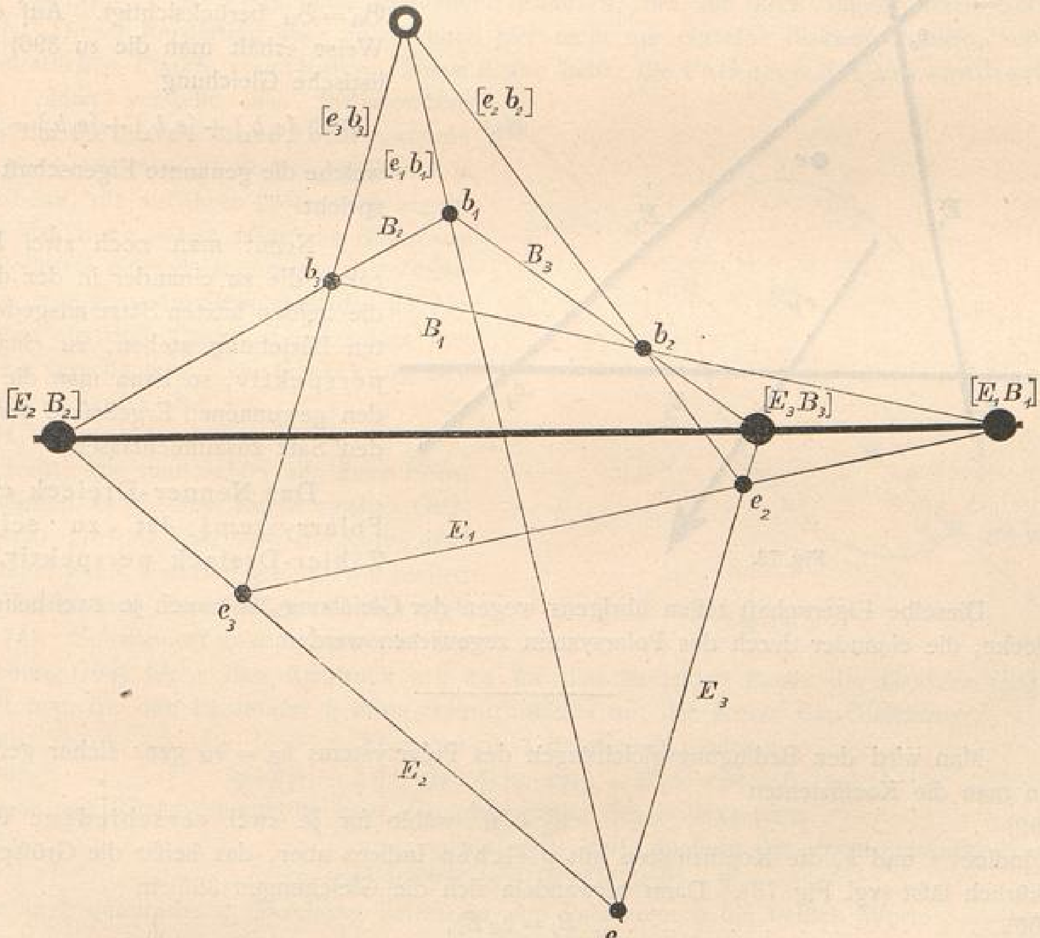


Fig. 72.

Die Addition dieser Gleichungen aber liefert mit Berücksichtigung der Definitionsgleichungen des Polarsystems (383) die Gleichung

396) $$[E_1 B_1] + [E_2 B_2] + [E_3 B_3] = 0 .$$

Zwischen den drei Schnittpunkten $[E_i B_i]$ der drei Paare entsprechender Seiten der beiden Nenner- und Zähler-Dreiecke $e_1 e_2 e_3$ und $b_1 b_2 b_3$ besteht also eine *besonders einfache* Zahlbeziehung. Aber schon aus der Thatsache, dafs zwischen den drei Punkten $[E_i B_i]$ *überhaupt* eine Zahlbeziehung herrscht, folgt der Satz:

Die Schnittpunkte der drei Paare entsprechender Seiten des Nenner- und Zähler-Dreiecks eines Polarsystems $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ liegen auf *einer* Geraden.

Und aus dieser Eigenschaft folgt bekanntlich nach dem Satze von Desargues die andere:

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken beider Dreiecke schneiden sich in *einem* Punkte.

Sie ergiebt sich übrigens auch *direkt* analytisch, wenn man durch Multiplikation der Gleichungen 364) mit e_i die zu 395) dualistischen Ausdrücke bildet:

397) . . . . $$\begin{cases} [e_1 b_1] = \mathfrak{B}_{12} E_3 - \mathfrak{B}_{13} E_2 \\ [e_2 b_2] = \mathfrak{B}_{23} E_1 - \mathfrak{B}_{21} E_3 \\ [e_3 b_3] = \mathfrak{B}_{31} E_2 - \mathfrak{B}_{32} E_1, \end{cases}$$

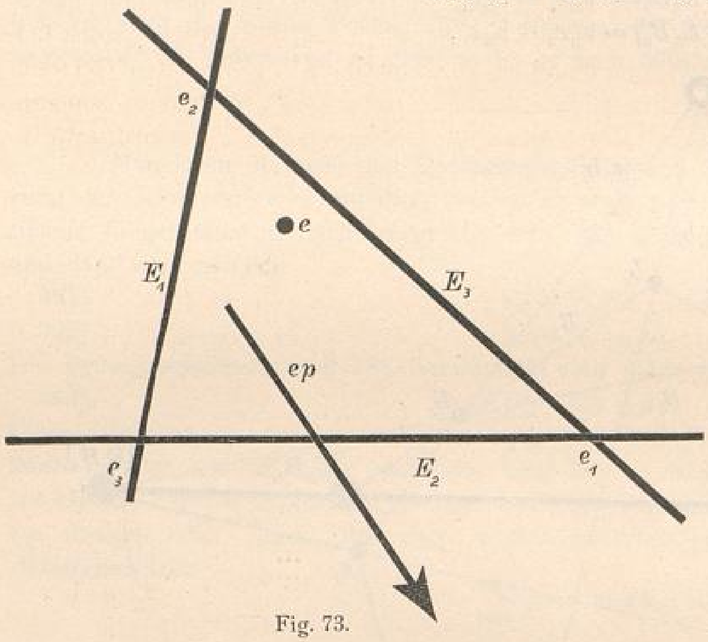


Fig. 73.

sodann wieder diese Ausdrücke addiert und dabei die Gleichungen $\mathfrak{B}_{ik} = \mathfrak{B}_{ki}$ berücksichtigt. Auf diese Weise erhält man die zu 396) dualistische Gleichung

398) $[e_1 b_1] + [e_2 b_2] + [e_3 b_3] = 0$,

welche die genannte Eigenschaft ausspricht.

Nennt man noch zwei Dreiecke, die zu einander in der durch die beiden letzten Sätze ausgedrückten Beziehung stehen, zu einander perspektiv, so kann man die beiden gewonnenen Ergebnisse auch in den Satz zusammenfassen:

Das Nenner-Dreieck eines Polarsystems ist zu seinem Zähler-Dreieck perspektiv.

Dieselbe Eigenschaft teilen übrigens wegen der Gleichung 394) auch je zwei beliebige Dreiecke, die einander durch das Polarsystem zugewiesen werden.

Man wird den Bedingungsgleichungen des Polarsystems $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$ ganz sicher gerecht, wenn man die Koeffizienten

399) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = 0$ wählt für je zwei verschiedene Werte der Indices i und k, die Koeffizienten mit gleichen Indices aber, das heifst die Gröfsen $\mathfrak{b}_{ii}$, willkürlich läfst (vgl. Fig. 73). Dann verwandeln sich die Gleichungen 363) in

400) . . . . $B_i = \mathfrak{b}_{ii} E_i$,

und der Bruch $\boldsymbol{p}$ nimmt daher die Gestalt an

401) . . . . $$\boldsymbol{p} = \frac{\mathfrak{b}_{11} E_1,\ \mathfrak{b}_{22} E_2,\ \mathfrak{b}_{33} E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3},$$

welche zeigt, dafs er den Ecken des Fundamentaldreiecks deren Gegenseiten als Polaren zuweist, aufserdem aber dem Einheitspunkte

402) . . . . $e = e_1 + e_2 + e_3$ den Stab

403) . . . . $e\boldsymbol{p} = \mathfrak{b}_{11} E_1 + \mathfrak{b}_{22} E_2 + \mathfrak{b}_{33} E_3$,

das heifst mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit der $\mathfrak{b}_{ii}$, einen ganz beliebigen Stab der Ebene.

Bezeichnet man noch ein Dreieck, dessen Seiten die Polaren der gegenüberliegenden Ecken hinsichtlich eines Polarsystems bilden, als ein Polardreieck des Polarsystems, so läfst sich das gewonnene Ergebnis in dem Satze aussprechen:

Um ein Polarsystem festzulegen, kann man ein Polardreieck des Systems willkürlich annehmen und aufserdem noch einem beliebigen vierten Punkte eine beliebige Gerade als Polare zuweisen. Dadurch ist dann das Polarsystem bis auf einen konstanten Faktor, von dem die Länge der Stäbe abhängt, eindeutig bestimmt.

An die Stelle der Frage nach den Doppelelementen, welche bei den kollinearen Systemen hervortrat, stellt sich bei der reciproken Verwandtschaft und insbesondere auch bei dem Polarsystem die Frage nach denjenigen Punkten, die auf ihren zugeordneten Geraden liegen. Dieser Forderung aber entsprechen hier nicht nur einzelne diskrete Punkte, sondern die sämtlichen Punkte einer Kurve. Diese Kurve heifst die Polkurve der Verwandtschaft.

Man versteht also insbesondere unter der Polkurve eines Polarsystems den geometrischen Ort derjenigen Punkte x der Ebene, die auf ihren Polaren $x\boldsymbol{p}$ liegen. Diese Erklärung liefert sofort die *Gleichung* der Polkurve eines Polarsystems; denn diese hat ja nur auszudrücken, dafs das äufsere Produkt aus dem Punkte x und seiner Polare $x\boldsymbol{p}$ verschwindet. Die Gleichung der Polkurve lautet also

404) . . . $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0$

und stellt, wie man schon aus ihrer Form entnehmen kann, eine Kurve zweiter Ordnung dar. In der That wird die Kurve 404) von einer jeden Geraden $[yz]$ in zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten (vgl. Fig. 74). Substituiert man nämlich in die Gleichung 404) für x den Ausdruck $y + \mathfrak{h}z$ für den laufenden Punkt der Geraden $[yz]$, so erhält man für den Parameter $\mathfrak{h}$ ihres Schnittpunktes mit der Kurve die Gleichung

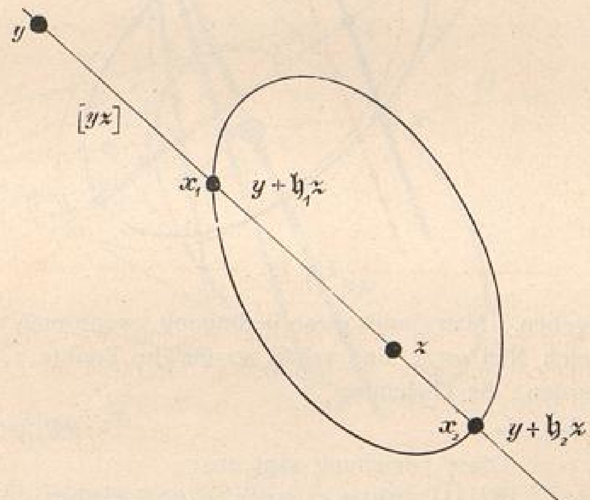


Fig. 74.

405) . . . . $[(y + \mathfrak{h}z) \cdot (y + \mathfrak{h}z)\boldsymbol{p}] = 0$ oder

406) . . . . . $[y \cdot y\boldsymbol{p}] + \mathfrak{h}([z \cdot y\boldsymbol{p}] + [y \cdot z\boldsymbol{p}]) + \mathfrak{h}^2[z \cdot z\boldsymbol{p}] = 0$,

die man mit Rücksicht auf die erste Grundgleichung des Polarsystems

394) . . . . $[z \cdot y\boldsymbol{p}] = [y \cdot z\boldsymbol{p}]$ auch in der Form schreiben kann

407) . . . . $[y \cdot y\boldsymbol{p}] + 2\mathfrak{h}[z \cdot y\boldsymbol{p}] + \mathfrak{h}^2[z \cdot z\boldsymbol{p}] = 0$.

Diese in $\mathfrak{h}$ quadratische Gleichung liefert für den Parameter $\mathfrak{h}$ die beiden Werte

408) . . . . . $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{h}_1\\ \mathfrak{h}_2\end{matrix}\right\} = \dfrac{-[z \cdot y\boldsymbol{p}] \pm \sqrt{[z \cdot y\boldsymbol{p}]^2 - [y \cdot y\boldsymbol{p}]\,[z \cdot z\boldsymbol{p}]}}{[z \cdot z\boldsymbol{p}]}$.

Die Kurve wird also in der That von einer jeden Geraden $[yz]$ in zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten, nämlich in den Punkten

409) . . . . $x_1 = y + \mathfrak{h}_1 z$ und $x_2 = y + \mathfrak{h}_2 z$,

und ist somit eine Kurve zweiter Ordnung, das heifst, man hat den Satz:

Die Polkurve eines Polarsystems ist eine Kurve zweiter Ordnung.

Die Polkurve gewinnt für das Polarsystem dadurch noch eine besondere Bedeutung, dafs sie eine anschauliche Darstellung der Beziehung zwischen dem Pol und der Polare eines Polarsystems ermöglicht. Um diese zu finden, denke man sich in der Gleichung 407) etwa den Punkt y fest gegeben, den Punkt z aber in der Ebene beweglich und frage nach denjenigen Punkten z der Ebene, die von dem Punkte y durch die Polkurve harmonisch getrennt werden (vgl. Fig. 75). Dazu hat man die Bedingung aufzustellen, der die Punkte z genügen müssen, damit die Gleichung 407) für den Parameter $\mathfrak{y}$ zwei entgegengesetzt gleiche Werte $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_2 = -\mathfrak{y}$ liefere, damit sich also für die Schnittpunkte x_1 und x_2 der Geraden $[yz]$ mit der Kurve zwei Werte von der Form

410) . . . . $x_1 = y + \mathfrak{y}z$ und $x_2 = y - \mathfrak{y}z$

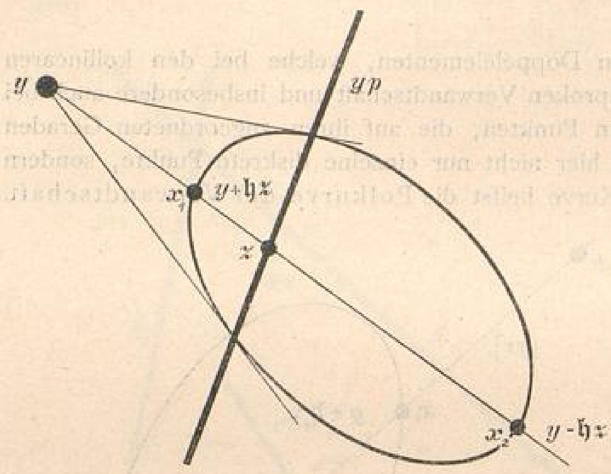


Fig. 75.

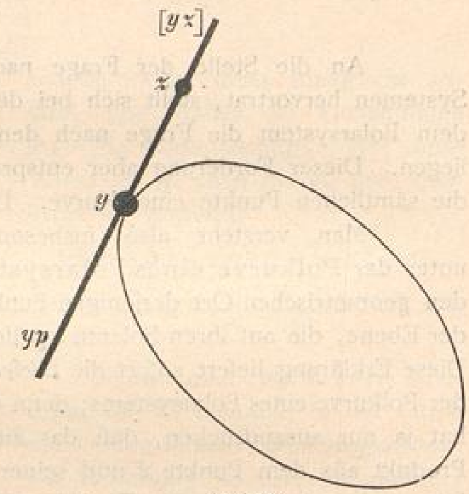


Fig. 76.

ergeben. Man findet diese Bedingung, wenn man den Koeffizienten von $\mathfrak{y}$ in der Gleichung 407) gleich Null setzt, und erhält so für die Punkte z, welche vom Punkte y harmonisch getrennt werden, die Gleichung

411) . . . . $[z \cdot y\boldsymbol{p}] = 0$.

Diese Gleichung sagt aus:

Alle Punkte z, welche von einem gegebenen Punkte y durch die Polkurve eines Polarsystems $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ harmonisch getrennt werden, liegen auf einer Geraden, nämlich auf der Polare $y\boldsymbol{p}$ des Punktes y in Bezug auf das Polarsystem.

Die Polare $y\boldsymbol{p}$ eines beliebigen Punktes y in Bezug auf ein Polarsystem ist also *identisch mit der gewöhnlichen Kegelschnittspolare* jenes Punktes in Bezug auf die Polkurve des Polarsystems. Insbesondere sind die drei Zählerstäbe $B_i = e_i\boldsymbol{p}$ des Bruches $\boldsymbol{p}$, welche den Nennerpunkten e_i durch das Polarsystem zugeordnet werden, die Kegelschnittspolaren der Grundpunkte e_i in Bezug auf die Polkurve des Polarsystems.

Doch hat die oben gegebene Definition der Polare eines Punktes *durch ein Polarsystem* insofern einen Vorzug vor der Erklärung *durch einen Kegelschnitt*, als bei Zugrundelegung des Polarsystems die Polare auch dann noch aus reellen Elementen konstruierbar bleibt, wenn der Kegelschnitt, das heifst die Polkurve des Polarsystems, imaginär wird.

Eine besondere Besprechung erfordert noch der Fall, wo der Punkt y, dessen Polare $y\boldsymbol{p}$ zufolge der Gleichung 411) von dem Punkte z beschrieben wird, selbst auf der Polkurve $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0$ gelegen ist, also der Gleichung

412) . . . . $[y \cdot y\boldsymbol{p}] = 0$

genügt (vgl. Fig. 76).

In diesem Falle liegt der Punkt y, wie die Gleichung 412) zeigt, auf seiner Polare $y\mathfrak{p}$, was übrigens auch aus dem *Begriffe der Polkurve* hervorgeht. Die oben betrachtete Gerade $[yz]$, welche einen beliebigen Punkt z der Polare $y\mathfrak{p}$ mit y verbindet, ist daher identisch mit der Polare $y\mathfrak{p}$ des Punktes y. Aus der Voraussetzung, nach welcher der Punkt y ein Punkt der Polkurve ist, folgt aber weiter, dafs von den beiden Schnittpunkten $x_1 = y + \mathfrak{y}_1 z$ und $x_2 = y + \mathfrak{y}_2 z$ der Geraden $[yz]$ und der Polkurve sicher der eine, sagen wir der Punkt $x_1 = y + \mathfrak{y}_1 z$, mit dem Punkte y zusammenfällt, und es wird somit $\mathfrak{y}_1 = 0$; und, da wegen 411) überdies $\mathfrak{y}_2 = -\mathfrak{y}_1$ ist, so wird auch $\mathfrak{y}_2 = 0$, das heifst, auch der zweite Schnittpunkt x_2 der Geraden $[yz]$ und der Polkurve fällt mit y zusammen. Die Gerade $[yz]$ oder, was nach Obigem dasselbe ist, die Gerade $y\mathfrak{p}$ hat also mit der Polkurve die beiden in den Punkt y zusammenfallenden Punkte x_1 und x_2 gemein; sie ist somit eine Tangente der Kurve, und der Punkt y ihr Berührungspunkt. Man hat daher den Satz:

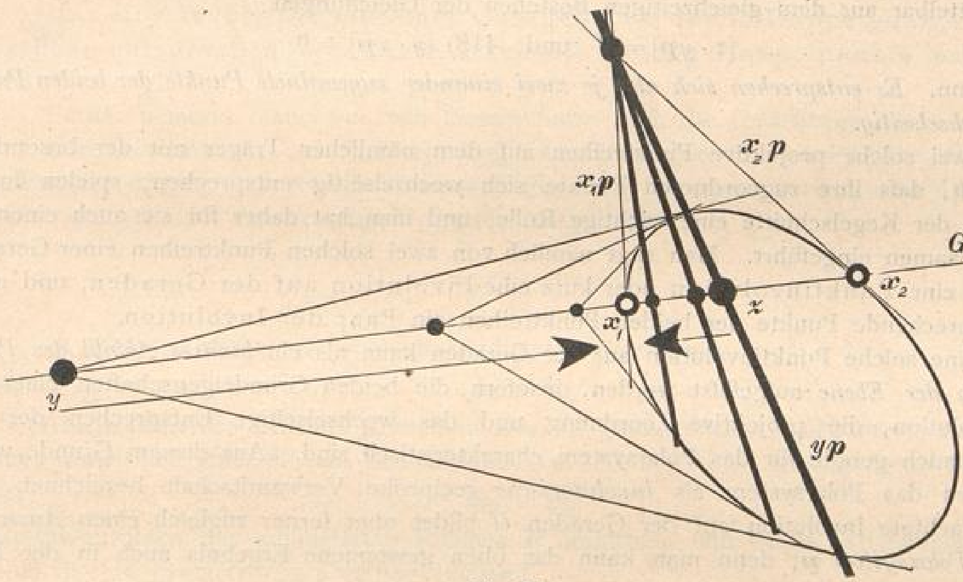


Fig. 77.

Die Polare eines Punktes der Polkurve eines Polarsystems ist die Tangente der Kurve in diesem Punkte.

Nennt man noch zwei Punkte y und z eines Polarsystems, von denen jeder auf der Polare des andern liegt (vgl. S. 127), hinsichtlich des Polarsystems konjugiert, so kann man die Gleichung

411) . . . . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$

oder die gleichwertige Gleichung

413) . . . . $[y \cdot z\mathfrak{p}] = 0$

als die Bedingung des Konjugiertseins der Punkte y und z hinsichtlich des Polarsystems $\mathfrak{p}$ bezeichnen.

Läfst man dann den Punkt y eine feste Gerade beschreiben, von der ein beliebiger Stab mit G bezeichnet sein mag (vgl. Fig. 77), und bestimmt zu jeder Lage des Punktes y den auf *derselben Geraden* G liegenden konjugierten Punkt z, so erhält man auf ihr *zwei projektive Punktreihen von besonderer Art.* In der That sind zunächst die beiden Punktreihen der Punkte y und z *projektiv;* denn nach S. 116 wird eine Punktreihe durch eine *jede* Reciprocität, insbesondere also auch durch ein Polarsystem, in ein projektives Strahlbüschel übergeführt. Es ist daher auch das Strahlbüschel der Polaren $y\mathfrak{p}$, welches der Punktreihe der

Punkte y durch das Polarsystem zugewiesen wird, zu dieser Punktreihe projektiv. Die Punktreihe der Punkte z andererseits ist wieder zum Strahlbüschel dieser Polaren $y\mathfrak{p}$ perspektiv. Denn die Erklärungsgleichung konjugierter Punkte

411) . . . . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$

besagt ja, dafs der zu y konjugierte Punkt z auf dem Strahle $y\mathfrak{p}$ liegt. Folglich ist die Punktreihe der Punkte z zu dem Strahlbüschel der Polaren $y\mathfrak{p}$ auch projektiv (vgl. Teil II S. 43) und somit auch projektiv zu der mit diesem Strahlbüschel projektiven Punktreihe der Punkte y.

Die beiden Punktreihen der Punkte y und z haben nun aber noch die *besondere Eigenschaft*, dafs, wenn dem Punkte y, aufgefafst als Punkt der ersten Punktreihe, in der zweiten Punktreihe der Punkt z zugeordnet ist, dann auch umgekehrt dem Punkte z, aufgefafst als Punkt der ersten Punktreihe, in der zweiten Punktreihe der Punkt y zugewiesen wird, was man unmittelbar aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen

411) . . . . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$ und 413) $[y \cdot z\mathfrak{p}] = 0$

folgern kann. *Es entsprechen sich also je zwei einander zugeordnete Punkte der beiden Punktreihen wechselseitig.*

Zwei solche projektive Punktreihen auf dem nämlichen Träger mit der besonderen Eigenschaft, dafs ihre zugeordneten Punkte sich wechselseitig entsprechen, spielen in der Geometrie der Kegelschnitte eine wichtige Rolle, und man hat daher für sie auch einen besonderen Namen eingeführt. Man sagt nämlich von zwei solchen Punktreihen einer Geraden, sie bilden eine Punktinvolution oder kurz eine Involution auf der Geraden, und nennt zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen ein Paar der Involution.

Eine solche Punktinvolution auf der Geraden kann als ein *binäres Abbild des Polarsystems in der Ebene* aufgefafst werden, insofern die beiden Grundeigenschaften einer solchen Involution, die projektive Zuordnung und das wechselseitige Entsprechen der Elemente, ja auch gerade für das Polarsystem charakteristisch sind. Aus diesem Grunde wurde schon oben das Polarsystem als *involutorische* reciproke Verwandtschaft bezeichnet. Die oben betrachtete Involution auf der Geraden G bildet aber ferner zugleich einen *Ausschnitt aus dem Polarsystem* $\mathfrak{p}$; denn man kann das oben gewonnene Ergebnis auch in der Form aussprechen:

Auf jeder beliebigen Geraden G der Ebene bilden die konjugierten Punkte eines Polarsystems eine Involution.

Von dieser Involution sagt man noch, sie werde *durch das Polarsystem* (oder auch wohl durch seine Polkurve) *auf der Geraden G hervorgerufen.*

Die *vollständige analytische Darstellung* dieser Involution erhält man, wenn man zu der Bedingungsgleichung für ein Paar konjugierte Punkte überhaupt

411) . . $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$ noch die Gleichung hinzugefügt 414) $[yz \cdot G] = 0$,

welche ausdrückt, dafs die Gerade des Stabes $[yz]$ mit der Geraden des Stabes G zusammenfällt.

Schneidet die Gerade $G = [yz]$ die Polkurve $[x \cdot x\mathfrak{p}] = 0$ in zwei reellen Punkten x_1 und x_2, so bestehen für diese Punkte die Gleichungen

415) . . . . $[x_1 \cdot x_1\mathfrak{p}] = 0$ und 416) $[x_2 \cdot x_2\mathfrak{p}] = 0$,

und vergleicht man diese Gleichungen ihrer Form nach mit der Bedingung $[z \cdot y\mathfrak{p}] = 0$ für ein Paar y, z der Involution 411), 414), so sieht man, dafs die Punkte x_1 und x_2 in der Involution, die das Polarsystem auf der Geraden G hervorruft, sich selbst konjugiert sind, das heifst die Doppelpunkte dieser Involution bilden. Denkt man sich ferner diese Doppelpunkte x_1

und x_2 wie oben auf S. 129 als Vielfachensummen irgend zweier Punkte y und z dargestellt, welche ein Paar dieser Involution bilden, also der Gleichung

411) . . . . $[z \cdot y\boldsymbol{p}] = 0$

genügen, so ergeben sich, wegen 411) mit Rücksicht auf 407) oder 408) für die Doppelpunkte x_1 und x_2 Ausdrücke von der Form

410) . . . . $x_1 = y + \mathfrak{h} z$ und $x_2 = y - \mathfrak{h} z$,

und man erhält daher den Satz:

Schneidet eine Gerade G die Polkurve eines Polarsystems, so liegen ihre Schnittpunkte x_1 und x_2 harmonisch zu jedem Paare y, z derjenigen Involution, die das Polarsystem auf der Geraden G hervorruft.

Uebrigens sieht man sofort, dafs diese Beziehung auch unabhängig von dem Begriff der Polkurve, auf entsprechende Weise wie oben, schon im binären Gebiet hätte entwickelt werden können, und dafs daher auch ganz allgemein der Satz besteht:

Hat eine Involution auf einer Geraden zwei reelle Doppelpunkte, so wird jedes Paar entsprechender Punkte durch die beiden Doppelpunkte harmonisch getrennt.

Ferner bemerkt man, dafs von diesem Satze auch die *Umkehrung* gilt:

Die Gesamtheit der Punktpaare einer Geraden, deren Punkte durch zwei feste Punkte dieser Geraden harmonisch getrennt werden, bildet eine Involution, von der jene festen Punkte die Doppelpunkte sind.

In ähnlicher Weise wie oben die Bedingungsgleichungen

383) . . . . $\mathfrak{b}_{ik} = \mathfrak{b}_{ki}$

für die Ableitzahlen des Bruches $\boldsymbol{p}$ zu dem Zwecke geometrischer Folgerungen umgewandelt wurden, lassen sich auch die aus den Gleichungen 383) folgenden Bedingungsgleichungen

384) . . . . $\mathfrak{B}_{ik} = \mathfrak{B}_{ki}$

für die Ableitzahlen des adjungierten Bruches $\boldsymbol{P}$ umformen und durch Gleichungen ersetzen, die eine direkte geometrische Deutung zulassen.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 364), 361) und 362) wird nämlich wieder

417) . . . . $\mathfrak{B}_{ik} = [E_k b_i]$ oder wegen 352)

418) . . . . $\mathfrak{B}_{ik} = [E_k \cdot E_i \boldsymbol{P}]$.

Die Bedingungsgleichungen 384) verwandeln sich daher in die Gleichungen

419) . . . . $[E_k \cdot E_i \boldsymbol{P}] = [E_i \cdot E_k \boldsymbol{P}]$.

Aus diesen Gleichungen für die Grundstäbe E_i und E_k folgt dann wieder genau so wie in der dualistisch entsprechenden Entwickelung (vgl. S. 126) das Bestehen der analogen Gleichung für zwei beliebige Stäbe V und W, das heifst der Gleichung

420) . . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = [V \cdot W\boldsymbol{P}]$.

Diese Gleichung möge die zweite Grundgleichung des Polarsystems heifsen; sie kann als Ausgangspunkt für die Ableitung derjenigen Eigenschaften des Polarsystems dienen, die den bisher entwickelten Eigenschaften dualistisch entsprechen. Zunächst folgt aus ihr wieder, dafs mit der Gleichung

421) . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$ stets die Gleichung 422) . . . $[V \cdot W\boldsymbol{P}] = 0$

verknüpft ist. Darin aber liegt der Satz (vgl. Fig. 78):

Wenn die Gerade des Stabes W durch den Pol von V geht, so geht auch die Gerade des Stabes V durch den Pol von W hindurch.

Ferner frage man nach der Kurve, die der Polkurve dualistisch entspricht, das heifst nach dem Umhüllungsgebilde aller derjenigen Geraden U der Ebene, die durch ihre eigenen Pole $U\boldsymbol{P}$ hindurchgehen. Diese Kurve möge die Polarkurve des Polarsystems genannt werden. Aus ihrer Erklärung folgt unmittelbar die Gleichung der Kurve:

423) $$[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0.$$

Diese sagt aus, dafs alle Geraden, die der angegebenen Forderung genügen, eine Kurve zweiter Klasse umhüllen. In der That gehen von jedem Punkte der Ebene zwei reelle oder imaginäre Tangenten an die Kurve 423). Um dies zu zeigen, denke man sich jenen Punkt als äufseres Produkt $[VW]$ zweier beliebigen Stäbe V und W dargestellt, welche durch ihn hindurchgehen (vgl. Fig. 79). Dann wird jeder beliebige Stab des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[VW]$ sich durch eine Summe von der Form $V + \mathfrak{h} W$ ausdrücken lassen, und man wird die in dem Strahlbüschel mit dem Scheitel $[VW]$ enthaltenen Tangenten der Polar-

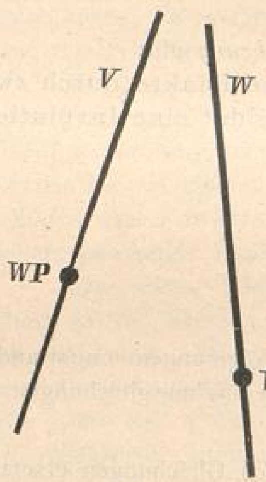


Fig. 78.

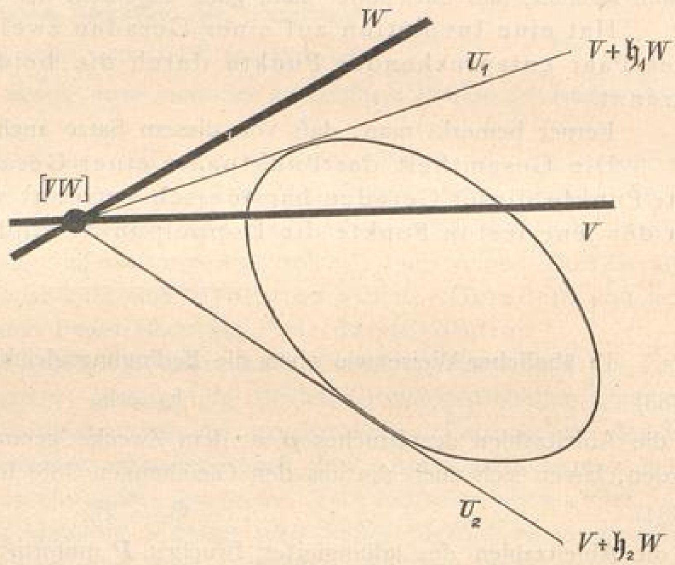


Fig. 79.

kurve 423) erhalten, wenn man in die Gleichung 423) statt U den Ausdruck $V + \mathfrak{h} W$ für einen beliebigen Strahl jenes Strahlbüschels substituiert. Dadurch aber bekommt man für den Parameter $\mathfrak{h}$ der in dem Strahlbüschel enthaltenen Tangenten der Kurve die Gleichung:

424) $$[(V + \mathfrak{h} W) \cdot (V + \mathfrak{h} W)\boldsymbol{P}] = 0 \text{ oder}$$

425) $$[V \cdot V\boldsymbol{P}] + \mathfrak{h}([W \cdot V\boldsymbol{P}] + [V \cdot W\boldsymbol{P}]) + \mathfrak{h}^2 [W \cdot W\boldsymbol{P}] = 0,$$

für die man mit Rücksicht auf die zweite Grundgleichung des Polarsystems

420) $$[W \cdot V\boldsymbol{P}] = [V \cdot W\boldsymbol{P}]$$

auch schreiben kann

426) $$[V \cdot V\boldsymbol{P}] + 2\mathfrak{h}[W \cdot V\boldsymbol{P}] + \mathfrak{h}^2 [W \cdot W\boldsymbol{P}] = 0.$$

Diese in $\mathfrak{h}$ quadratische Gleichung liefert für den Parameter $\mathfrak{h}$ die beiden Werte

427) $$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{h}_1 \\ \mathfrak{h}_2\end{matrix}\right\} = \frac{-[W \cdot V\boldsymbol{P}] \pm \sqrt{[W \cdot V\boldsymbol{P}]^2 - [V \cdot V\boldsymbol{P}]\,[W \cdot W\boldsymbol{P}]}}{[W \cdot W\boldsymbol{P}]}.$$

An die Polarkurve lassen sich also in der That von jedem Punkte $[VW]$ der Ebene zwei reelle oder imaginäre Tangenten legen, nämlich die Tangenten

428) $$U_1 = V + \mathfrak{h}_1 W \quad \text{und} \quad U_2 = V + \mathfrak{h}_2 W;$$

und sie ist somit wirklich eine Kurve zweiter Klasse, das heifst, man hat den Satz:

Die Polarkurve eines Polarsystems ist eine Kurve zweiter Klasse.

Hält man in der Gleichung 426) den Stab V fest, denkt sich aber den Stab W in der Ebene veränderlich, den Punkt $[VW]$ also auf der Geraden V verschiebbar, und fragt nach denjenigen Stäben W, welche durch die beiden vom Punkte $[VW]$ ausgehenden Tangenten U_1 und U_2 harmonisch getrennt werden (vgl. Fig. 80), so hat man die Bedingung aufzustellen, der die Stäbe W genügen müssen, damit die Gleichung 426) für $\mathfrak{h}$ zwei entgegengesetzt gleiche Werte $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_2 = -\mathfrak{h}$ liefere, damit sich also für die Tangenten U_1 und U_2 Werte von der Form

$$429)\quad \begin{cases} U_1 = V + \mathfrak{h}W \text{ und} \\ U_2 = V - \mathfrak{h}W \end{cases}$$

ergeben. Diese Bedingung findet man, wenn man den Koeffizienten von $\mathfrak{h}$ in der Gleichung 426) gleich Null setzt, wodurch man für den Stab W die Gleichung erhält

$$430)\qquad [W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0,$$

das heifst, es ergiebt sich eine Gleichung ersten Grades in W, welche aussagt, dafs das äufsere Produkt des Stabes W und des Poles $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V verschwindet; darin liegt der Satz:

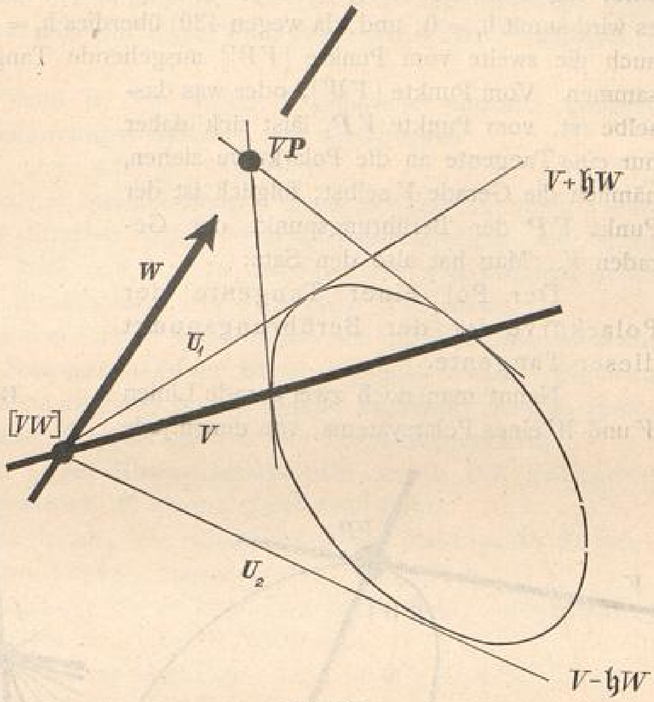


Fig. 80.

Alle Stäbe W, welche von einer festen Geraden V durch die vom Punkte $[VW]$ ausgehenden Tangenten der Polkurve harmonisch getrennt werden, gehen durch einen festen Punkt, nämlich durch den Pol $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V hindurch. Oder:

Jedes Tangentenpaar, das sich von einem Punkte einer Geraden V an die Polarkurve eines Polarsystems legen läfst, bildet, zusammen mit der Geraden V und der Geraden nach ihrem Pole $V\boldsymbol{P}$ in Bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}$, einen harmonischen Strahlwurf. Oder kürzer:

Der Punkt $V\boldsymbol{P}$, welcher einer Geraden V durch ein Polarsystem $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ als Pol zugewiesen ist, wird durch die Polarkurve des Polarsystems von der Geraden V harmonisch getrennt.

Der Pol $V\boldsymbol{P}$ einer beliebigen Geraden V in Bezug auf ein Polarsystem $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}$ ist also *identisch mit dem gewöhnlichen Kegelschnittspol* jener Geraden in Bezug auf die Polarkurve des Polarsystems. So sind namentlich auch die drei Zählerpunkte $b_i = E_i\boldsymbol{P}$ die Kegelschnittspole der Grundstäbe E_i in Bezug auf die Polarkurve des Polarsystems.

Eine besondere Besprechung erfordert noch der Fall, wo der Stab V, dessen Pol $V\boldsymbol{P}$ zufolge der Gleichung 430) von den Geraden der Stäbe W umhüllt wird, selbst die Polarkurve $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$ berührt, also der Gleichung

$$431)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [V \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$$

Genüge leistet (vgl. Fig. 81).

In diesem Falle geht die Gerade V, wie die Gleichung 431) zeigt, selbst durch ihren Pol $V\boldsymbol{P}$ hindurch, was übrigens auch aus dem *Begriffe der Polarkurve* folgt. Der oben betrachtete Punkt $[VW]$, den ein beliebiger Strahl W des Strahlbüschels mit dem Scheitel $V\boldsymbol{P}$

aus der Geraden V ausschneidet, fällt also mit dem Punkte $V\boldsymbol{P}$, das heifst mit dem Pole der Geraden V, zusammen. Aus der Voraussetzung, nach welcher die Gerade des Stabes V eine Tangente der Polarkurve ist, folgt aber weiter, dafs von den beiden Tangenten $U_1 = V + \mathfrak{h}_1 W$ und $U_2 = V + \mathfrak{h}_2 W$, die sich von dem Punkte $[VW]$ aus an die Polarkurve legen lassen, die eine, sagen wir die Tangente $U_1 = V + \mathfrak{h}_1 W$, mit der Geraden V zusammenfallen mufs, und es wird somit $\mathfrak{h}_1 = 0$; und, da wegen 430) überdies $\mathfrak{h}_2 = -\mathfrak{h}_1$ ist, so wird auch $\mathfrak{h}_2 = 0$, das heifst, auch die zweite vom Punkte $[VW]$ ausgehende Tangente U_2 fällt mit der Geraden V zusammen. Vom Punkte $[VW]$, oder was dasselbe ist, vom Punkte $V\boldsymbol{P}$, läfst sich daher nur *eine* Tangente an die Polarkurve ziehen, nämlich die Gerade V selbst; folglich ist der Punkt $V\boldsymbol{P}$ der Berührungspunkt der Geraden V. Man hat also den Satz:

Der Pol einer Tangente der Polarkurve ist der Berührungspunkt dieser Tangente.

Nennt man noch zwei gerade Linien V und W eines Polarsystems, von denen jede

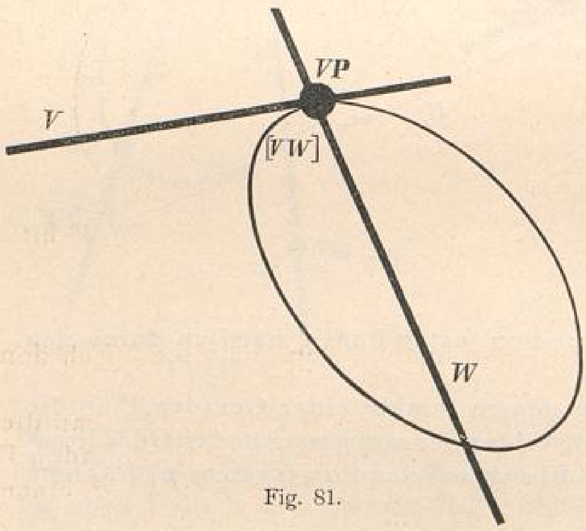


Fig. 81.

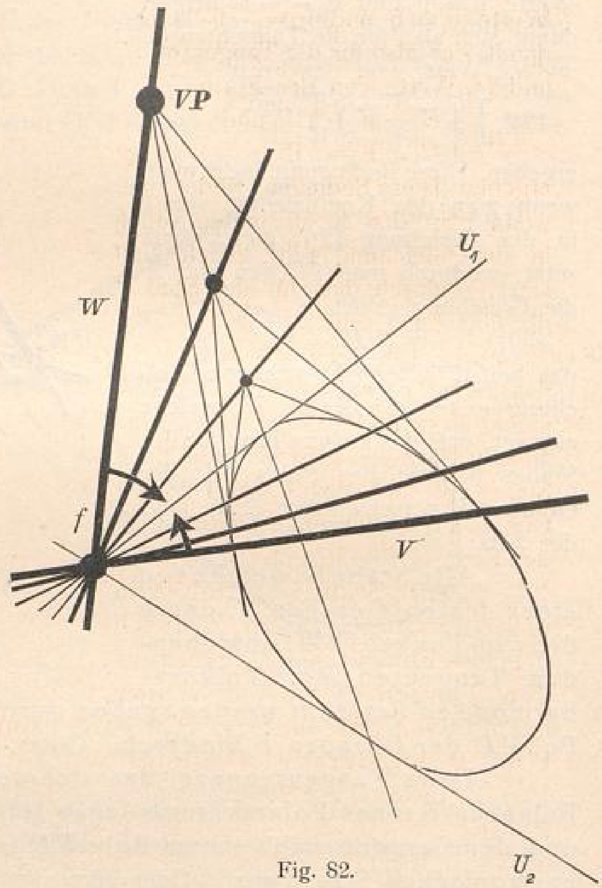


Fig. 82.

durch den Pol der andern geht (vgl. S. 133), hinsichtlich des Polarsystems konjugiert, so kann man die Gleichung

430) . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$ oder die gleichwertige Gleichung 432) $[V \cdot W\boldsymbol{P}] = 0$

als die Bedingung dafür bezeichnen, dafs die beiden Geraden V und W hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ konjugiert sind.

Läfst man dann die Geraden V ein Strahlbüschel beschreiben, dessen Mittelpunkt mit f bezeichnet sein möge (vgl. Fig. 82), und bestimmt zu jedem Strahle V dieses Strahlbüschels denjenigen konjugierten Strahl W, der *ebenfalls durch f hindurchgeht*, so bilden die Strahlen W im Punkte f ein zweites, zum Büschel der Strahlen V *projektives Strahlbüschel mit der besonderen Eigenschaft, dafs die Strahlen beider Büschel einander wechselseitig zugeordnet sind.* In der That sind zunächst die beiden Büschel der Strahlen V und W *projektiv;* denn nach S. 119 wird ein Strahlbüschel durch eine *jede* Reciprocität, insbesondere also auch durch ein Polarsystem in eine projektive Punktreihe übergeführt. Es ist daher auch die Punktreihe der Pole $V\boldsymbol{P}$, welche dem Strahlbüschel der Geraden V zugewiesen wird, zu diesem Strahlbüschel projektiv. Das Strahlbüschel der Geraden W andererseits ist wieder zu der Punktreihe dieser Pole $V\boldsymbol{P}$ perspektiv. Denn die Erklärungsgleichung konjugierter Geraden

430) . . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$

besagt ja, dafs die zu V konjugierte Gerade W durch den Punkt $V\boldsymbol{P}$ hindurchgeht. Folglich ist das Strahlbüschel der Geraden W zu der Punktreihe der Pole $V\boldsymbol{P}$ auch projektiv (vgl. Teil II S. 42) und somit auch projektiv zu dem mit dieser Punktreihe projektiven Strahlbüschel der Geraden V.

Dafs aber auch die Strahlen V und W der beiden Strahlbüschel einander *wechselseitig zugeordnet* sind, folgt aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen

430) . . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$ und 432) $[V \cdot W\boldsymbol{P}] = 0$.

Man sagt nun von zwei projektiven Strahlbüscheln, deren Scheitel in einen Punkt zusammenfallen, und deren zugeordnete Strahlen sich wechselseitig entsprechen, sie bilden zusammen eine Strahlinvolution oder kurz eine Involution in jenem Punkte und nennt zwei entsprechende Strahlen der beiden Strahlbüschel ein Paar der Involution.

Eine solche Strahlinvolution in einem Punkte kann ebenso wie die Punktinvolution auf einer Geraden als ein *binäres Abbild des Polarsystems in der Ebene* aufgefafst werden. Die oben betrachtete Involution im Punkte f insbesondere bildet überdies einen *Ausschnitt aus dem Polarsystem* $\boldsymbol{P}$; denn man kann das gewonnene Ergebnis auch in der Form aussprechen:

In jedem beliebigen Punkte f der Ebene bilden die durch ihn gehenden konjugierten Strahlen eines Polarsystems $\boldsymbol{P}$ eine Strahlinvolution.

Von dieser Involution sagt man ferner, sie werde *durch das Polarsystem* $\boldsymbol{P}$ (oder auch wohl durch seine Polarkurve) *in dem Punkte f hervorgerufen.*

Die *vollständige analytische Darstellung* dieser Involution erhält man, wenn man zu der Bedingung für ein Paar konjugierte Geraden V und W überhaupt

430). . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$ noch die Gleichung hinzufügt 433) $[VW \cdot f] = 0$,

welche aussagt, dafs sich die Geraden V und W im Punkte f schneiden.

Lassen sich von dem Punkte f an die Polarkurve $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$ zwei reelle Tangenten U_1 und U_2 legen, so bestehen für diese Tangenten die Gleichungen

434) . . . . $[U_1 \cdot U_1\boldsymbol{P}] = 0$ und 435) $[U_2 \cdot U_2\boldsymbol{P}] = 0$,

und vergleicht man diese Gleichungen ihrer Form nach mit der Bedingung $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$ für ein Paar V und W der Strahlinvolution 430), 433), so sieht man, dafs die Geraden U_1 und U_2 in der Involution, die das Polarsystem $\boldsymbol{P}$ in dem Punkte f hervorruft, sich selbst konjugiert, das heifst die Doppelstrahlen dieser Involution sind. Denkt man sich daher diese Doppelstrahlen U_1 und U_2 wie oben auf S. 134 als Vielfachensummen irgend zweier Stäbe V und W dargestellt, welche ein Paar dieser Involution bilden, also der Gleichung

430) . . . . $[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0$

genügen, so ergeben sich wegen 430) mit Rücksicht auf 426) oder 427) für die Doppelstrahlen U_1 und U_2 Ausdrücke von der Form

429) . . . . $U_1 = V + \mathfrak{h} W$ und $U_2 = V - \mathfrak{h} W$,

und man erhält daher den Satz:

Lassen sich von einem Punkte f an die Polarkurve eines Polarsystems zwei reelle Tangenten U_1 und U_2 ziehen, so liegen diese Tangenten harmonisch zu jedem Paare V und W derjenigen Strahlinvolution, die das Polarsystem in dem Punkte f hervorruft.

Die gewonnene Eigenschaft der Strahlinvolution hat aber wieder eine allgemeinere Bedeutung. Denn man kann ganz unabhängig von dem Begriffe der Polarkurve, auf entsprechende Weise wie oben, schon im binären Gebiete den Satz beweisen:

Hat eine Strahlinvolution eines Punktes zwei reelle Doppelstrahlen, so wird jedes Paar der Involution durch die beiden Doppelstrahlen harmonisch getrennt. Ferner gilt von diesem Satze auch die Umkehrung:

Die Gesamtheit der Strahlpaare eines Strahlbüschels, die von zwei festen Strahlen dieses Büschels harmonisch getrennt werden, bildet eine Strahlinvolution, deren Doppelstrahlen jene festen Strahlen sind.

Die Thatsache, dafs der Pol und die Polare eines Polarsystems sowohl durch dessen Polkurve (vgl. S. 130) wie durch dessen Polarkurve (vgl. S. 135) harmonisch getrennt werden, legt die Vermutung nahe, dafs die beiden Kurven überhaupt identisch sind, dafs also die Tangenten der Polkurve nichts anderes sind als die Umhüllungsgeraden der Polarkurve (vgl. Fig. 83). Um dies rein analytisch zu beweisen, bezeichne man die Polare des Punktes x mit U, setze also

436) . $x\boldsymbol{p} = U$

Ist dann ferner noch

437) . . $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist, so wird nach 380)

$$x = U\frac{1}{\boldsymbol{p}}$$ oder wegen 388)

438) . . $x = U\dfrac{\boldsymbol{P}}{\mathfrak{b}}$.

Mit Hülfe der beiden Formeln 436) und 438) aber läfst sich die linke Seite der Polkurvengleichung

439) $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0$ umformen; man erhält

$$[x \cdot x\boldsymbol{p}] = \left[U\frac{\boldsymbol{P}}{\mathfrak{b}} \cdot U\right]$$ oder

440) $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = \dfrac{1}{\mathfrak{b}}[U \cdot U\boldsymbol{P}]$

Diese Umformung war aber an die Bedingung geknüpft, dafs $\mathfrak{b} \gtrless 0$ ist, und zeigt also, dafs, *wenn diese Bedingung erfüllt ist, und unter U die Polare $x\boldsymbol{p}$ des Punktes x verstanden wird*, die Gleichung

439) . . . . $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0$ stets die Gleichung

441) . . . . $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$ nach sich zieht, und dafs umgekehrt die letztere Gleichung die erstere zur Folge hat.

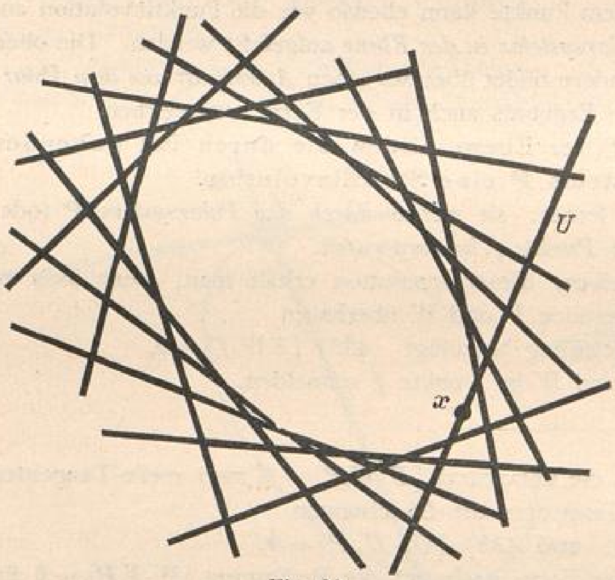


Fig. 83.

Wenn aber der Punkt x der Gleichung 439) genügt, also auf der Polkurve liegt, so ist, wie oben (vgl. S. 130 f.) gezeigt ist, die Polare $U = x\boldsymbol{p}$ die Tangente der Polkurve im Punkte x; und da die Gleichung 441) die Polarkurve darstellte, so besagt das Zusammenbestehen der Gleichungen 439) und 441) wirklich, dafs jede Tangente der Polkurve eine Umhüllungsgerade der Polarkurve ist.

Genügt andererseits die Gerade U der Gleichung 441), ist somit U eine Tangente der Polarkurve, und ist aufserdem wie vorher $x\boldsymbol{p} = U$, also nach 438) $x = \dfrac{1}{\mathfrak{b}}U\boldsymbol{P}$, so ist der Punkt x, welcher dann der letzten Gleichung zufolge den Pol jener Tangente U der Polarkurve darstellt, nach S. 136 der Berührungspunkt jener Tangente U der Polarkurve. Das

Zusammenbestehen der Gleichungen 441) und 439) zeigt daher, dafs die Berührungspunkte der Tangenten der Polarkurve zugleich Punkte der Polkurve sind.

Man hat also den Satz:

Unter der Voraussetzung, dafs die Determinante $\mathfrak{b}$ eines Polarsystems von Null verschieden ist, fällt seine Polkurve mit seiner Polarkurve zusammen.

Zehnter Abschnitt.

Ausartende Polarsysteme.

Die bisherige Untersuchung erstreckte sich vorzugsweise auf Polarsysteme, deren Determinante $\mathfrak{b} = |\mathfrak{b}_{ik}|$ von Null verschieden ist. Und in der That erfordern die Polarsysteme mit verschwindender Determinante eine besondere Betrachtung, zu der wir nunmehr übergehen wollen.

Es sei also ein Polarsystem gegeben durch einen Bruch

442) $$\mathfrak{p} = \frac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3},$$

der als Ausdruck eines Polarsystems der Grundgleichung des Polarsystems

443) $$[z \cdot y\mathfrak{p}] = [y \cdot z\mathfrak{p}]$$

Genüge leistet, der sich aber von den bis betrachteten Brüchen $\mathfrak{p}$ dadurch unterscheidet, dafs das äufsere Produkt seiner Zähler, das heifst das Produkt

444) $$[B_1 B_2 B_3] = 0$$

ist, dafs also die Determinante $\mathfrak{b} = |\mathfrak{b}_{ik}|$ verschwindet. Diese Gleichung 444) bedingt es, dafs der reciproke Wert des Bruches $\mathfrak{p}$ keinen Sinn mehr hat, und dafs daher alle diejenigen Formeln des vorigen Abschnitts, in denen der Bruch $\frac{1}{\mathfrak{p}}$ auftrat, ihre Bedeutung verlieren.

Aus der Gleichung 444) folgt, dafs zwischen den drei Zählerstäben B_1, B_2, B_3 eines solchen *ausgearteten Polarsystems* $\mathfrak{p}$ eine Zahlbeziehung herrscht, also eine Gleichung von der Form

445) $$\mathfrak{s}_1 B_1 + \mathfrak{s}_2 B_2 + \mathfrak{s}_3 B_3 = 0$$

besteht, in der wenigstens *eine* der drei Zahlgröfsen $\mathfrak{s}_i$ von Null verschieden ist. Man hat dann zwei Fälle zu unterscheiden, erstens den Fall, wo von den drei Produkten aus je zweien der Gröfsen B_i wenigstens eins von Null verschieden ist, und zweitens den Fall, wo alle diese drei Produkte gleichzeitig verschwinden.

Zuerst sei also der Fall betrachtet, dafs wenigstens eins von den drei Produkten $[B_2 B_3]$, $[B_3 B_1]$, $[B_1 B_2]$ *von Null verschieden ist.* Es läfst sich zeigen, dafs in diesem Falle neben der Gleichung 445) nicht noch eine zweite von ihr unabhängige Zahlbeziehung bestehen kann. Ist nämlich zum Beispiel das Produkt

446) $$[B_1 B_2] \gtrless 0,$$

so herrscht sicher zwischen den Stäben B_1 und B_2 keine Zahlbeziehung. Daraus aber folgt, dafs in der Gleichung 445) der Koeffizient $\mathfrak{s}_3 \lessgtr 0$ sein mufs; denn bei verschwindendem $\mathfrak{s}_3$ würde sich ja die Gleichung 445) auf eine Zahlbeziehung zwischen B_1 und B_2 allein reduzieren, und eine solche ist eben durch die Ungleichung 446) ausgeschlossen. Ist aber $\mathfrak{s}_3 \gtrless 0$, so ist die Gleichung 445) nach B_3 auflösbar und liefert für B_3 den Wert

447) $$B_3 = -\frac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{s}_3} B_1 - \frac{\mathfrak{s}_2}{\mathfrak{s}_3} B_2.$$

Angenommen nun, es bestünde zwischen den drei Stäben B_1, B_2, B_3 noch eine zweite Zahlbeziehung:

448) . . . . $\mathfrak{f}_1 B_1 + \mathfrak{f}_2 B_2 + \mathfrak{f}_3 B_3 = 0$,

die von der Zahlbeziehung 445) unabhängig wäre, so setze man den Wert von B_3 aus 447) in die Gleichung 448) ein. Dadurch würde sich diese dann in eine Gleichung von der Form

449) . . . . $\mathfrak{g}_1 B_1 + \mathfrak{g}_2 B_2 = 0$

verwandeln müssen; und in dieser können dann wieder die beiden Zahlgröfsen $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ nicht beide gleichzeitig verschwinden, weil sonst die beiden Zahlbeziehungen 445) und 448) gegen die Annahme nicht von einander unabhängig sein würden. Es gäbe also zwischen den Stäben B_1 und B_2 eine Zahlbeziehung. Eine solche aber widerspricht der Voraussetzung, nach der das Produkt $[B_1 B_2] \gtrless 0$ sein soll. Man hat also den Satz:

Sobald also das Produkt

444) . . . . $[B_1 B_2 B_3] = 0$

ist, aber wenigstens *eins* von den drei Produkten $[B_2 B_3]$, $[B_3 B_1]$, $[B_1 B_2]$ von Null verschieden ist, besteht zwischen den drei Gröfsen B_i *eine und nur eine* Zahlbeziehung

445) . . . . $\mathfrak{s}_1 B_1 + \mathfrak{s}_2 B_2 + \mathfrak{s}_3 B_3 = 0$.

Eine solche Zahlbeziehung sagt aus, dafs die Geraden der drei Stäbe B_i einen Punkt mit einander gemein haben (vgl. Fig. 84). Um die Eigenschaften zu ermitteln, die hieraus für das Polarsystem $\boldsymbol{p}$ entspringen, bezeichne man noch denjenigen Punkt, dessen Ableitzahlen die Koeffizienten der Zahlbeziehung 445) sind, mit s, setze also

450) . $s = \mathfrak{s}_1 e_1 + \mathfrak{s}_2 e_2 + \mathfrak{s}_3 e_3$,

so läfst sich wegen 442) die Gleichung 445) auch in der Form schreiben

451) . . . . $s\boldsymbol{p} = 0$,

in der sie für geometrische Folgerungen geeigneter ist.

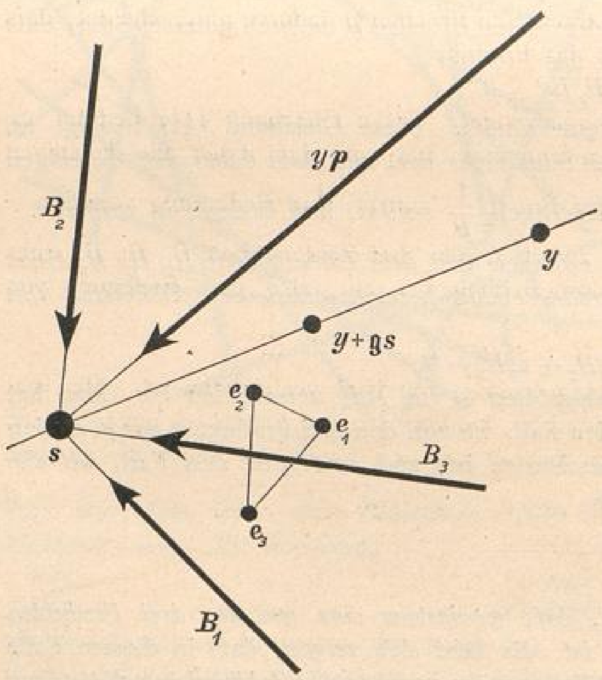


Fig. 84.

Zunächst nämlich zeigt diese Gleichungsform, dafs der Punkt s in dem Polarsystem $\boldsymbol{p}$ keine Polare besitzt, oder, wenn man will, dafs seine Polare ganz unbestimmt ist. Man kann nämlich die Gleichung 451) auch durch die Gleichung

452) . . . $s\boldsymbol{p} = 0 \cdot W$

ersetzen, in der W einen ganz beliebigen Stab der Ebene bedeutet, und sagt daher von dem Punkte s, *er sei zum Polarsystem* $\boldsymbol{p}$ *apolar.*

Ferner folgt aus der Gleichungsform 451) sofort, dafs der Punkt s auf der Polkurve des Polarsystems liegt. Denn multipliziert man die Gleichung 451) mit s, so findet man für den Punkt s die Zahlgleichung

453) . . . . $[s \cdot s\boldsymbol{p}] = 0$,

aus der hervorgeht, dafs *der Punkt s der Polkurve*

454) . . . . $[x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0$ *angehört.*

Aber die Gleichung 451) zeigt zugleich, dafs *der Punkt s auch auf der Geraden aller drei Grundstäbe B_i liegen mufs*, also der gemeinsame Schnittpunkt dieser drei Geraden ist.

In der That erhält man mit Rücksicht auf die Grundgleichung 443) des Polarsystems für die Produkte $[sB_i]$ die Darstellung

455) . . . . $[sB_i] = [s \cdot e_i\mathfrak{p}] = [e_i \cdot s\mathfrak{p}] = 0,$

welche wirklich aussagt, dafs der Punkt s den drei Polaren B_i der drei Grundpunkte e_i angehört. Dies Ergebnis läfst sich aber noch *verallgemeinern.* Ist nämlich V die Polare eines ganz beliebigen Punktes y, also

456) . . . . $V = y\mathfrak{p},$

so geht auch die Gerade des Stabes V durch den Punkt s hindurch; denn es wird wieder

457) . . . . $[sV] = [s \cdot y\mathfrak{p}] = [y \cdot s\mathfrak{p}] = 0.$

Sieht man daher davon ab, dafs zufolge der Gleichung 452) jeder beliebige Stab W der Ebene, wenn man sich ihn mit dem Koeffizienten 0 behaftet denkt, als Polare des Punktes s aufgefafst werden kann, so bleiben als Polaren von Punkten der Ebene nur solche Geraden übrig, die durch den ausgezeichneten Punkt s des Polarsystems hindurchgehen.

Dafür aber gehört dann umgekehrt einer jeden durch den Punkt s gehenden Geraden V, die einem Punkte y der Ebene als Polare zugeordnet ist, also der Gleichung

456) . . . . $V = y\mathfrak{p}$

genügt, als Pol *nicht nur* dieser eine Punkt y zu, sondern zugleich auch die sämtlichen Punkte $y + \mathfrak{g}s$ der geraden Verbindungslinie von y und s. Wegen 451) wird nämlich

458) . . . . $(y + \mathfrak{g}s)\mathfrak{p} = y\mathfrak{p} + \mathfrak{g}\, s\mathfrak{p} = y\mathfrak{p} = V,$

das heifst, die Gerade V kann auch als die Polare eines jeden beliebigen Punktes $y + \mathfrak{g}s$ jener Verbindungslinie $[ys]$ aufgefafst werden.

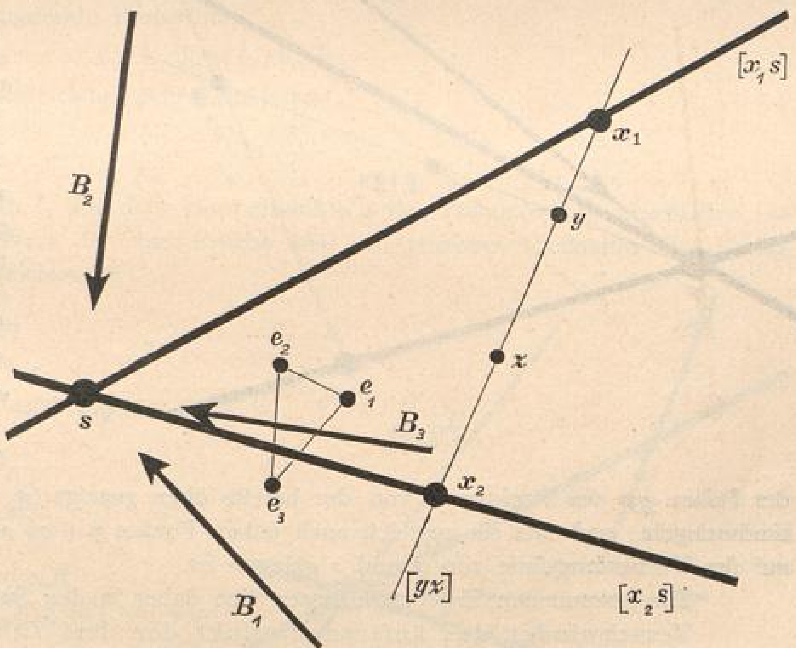


Fig. 85.

Um die Gestalt der Polkurve

459) . $[x \cdot x\mathfrak{p}] = 0$

eines solchen ausgearteten Polarsystems kennen zu lernen, zeige man zunächst gerade so wie bei einem *beliebigen* Polarsystem, dafs die Polkurve 459) von einer jeden Geraden $[yz]$ in zwei reellen oder imaginären Punkten x_1 und x_2 geschnitten wird (vgl. Fig. 85). Man substituiere dazu wieder in die Gleichung 459) statt x den Ausdruck $y + \mathfrak{h}z$ für den laufenden Punkt der Geraden $[yz]$ und erhält so die in $\mathfrak{h}$ quadratische Gleichung

460) . . . . $[y \cdot y\mathfrak{p}] + 2\mathfrak{h}\,[z \cdot y\mathfrak{p}] + \mathfrak{h}^2\,[z \cdot z\mathfrak{p}] = 0.$

Sind $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ ihre beiden Wurzeln, so sind

$$x_1 = y + \mathfrak{h}_1 z \quad \text{und} \quad x_2 = y + \mathfrak{h}_2 z$$

die beiden gewünschten Schnittpunkte der Geraden $[yz]$ mit der Polkurve. Und diese beiden Schnittpunkte können, falls die Linie $[yz]$ nicht gerade durch den Punkt s hindurchgeht, auch *nicht in einen Punkt zusammenfallen,* weil sonst, wie man sich leicht überzeugt, zwischen den b_i noch eine *zweite* Zahlbeziehung herrschen müfste, was nach S. 140 in dem vorliegenden

Falle ausgeschlossen ist. Die Gerade $[yz]$ schneidet also wirklich die Polkurve in zwei *getrennten* Punkten x_1 und x_2.

Dann aber folgt wieder aus der für die betrachtete Ausartung charakteristischen Gleichung 451), dafs der Polkurve auch *jeder Punkt derjenigen beiden Geraden* $[x_1 s]$ und $[x_2 s]$ *angehört, welche die Punkte* x_1 *und* x_2 *mit dem Punkte* s *verbinden.* Ein jeder Punkt nämlich, der einer von diesen beiden Geraden angehört, läfst sich unter der Form $x_i + \mathfrak{g}s$ $(i = 1, 2)$ darstellen. Und setzt man den Ausdruck $x_i + \mathfrak{g}s$ statt x in die linke Seite der Gleichung 459) ein, so nimmt diese die Form an $[(x_i + \mathfrak{g}s) \cdot (x_i + \mathfrak{g}s)\boldsymbol{p}]$ oder

$$[x_i \cdot x_i \boldsymbol{p}] + 2\mathfrak{g}[x_i \cdot s\boldsymbol{p}] + \mathfrak{g}^2 [s \cdot s\boldsymbol{p}].$$

In dieser Summe verschwinden aber die beiden letzten Glieder wegen 451); doch auch das erste Glied ist gleich Null, da nach der Voraussetzung die beiden Punkte x_i auf der Polkurve liegen. Also ist der Punkt $x_i + \mathfrak{g}s$ ebenfalls ein Punkt der Polkurve. Die Kurve enthält daher die beiden vom Punkte s nach den Punkten x_1 und x_2 laufenden Geraden und kann, da sie von zweiter Ordnung ist, auch *nur* aus diesen beiden Geraden bestehen, sie zerfällt somit in ein Geradenpaar mit dem Doppelpunkte s.

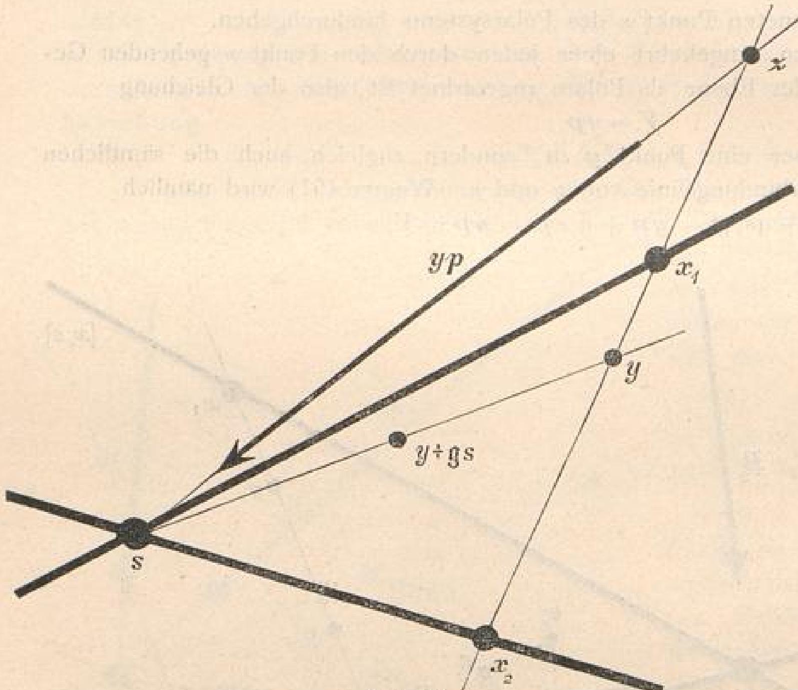


Fig. 86.

Die Parameter $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ der beiden Punkte x_1 und x_2 werden entgegengesetzt gleich, das heifst, der Punktwurf $y z x_1 x_2$ wird *harmonisch* (vgl. Fig. 86), wenn der Koeffizient von $\mathfrak{h}$ in der Gleichung 460) verschwindet, wenn also die Gleichung besteht

$$[z \cdot y\boldsymbol{p}] = 0.$$

Dann liegt der Punkt z auf der Polare $y\boldsymbol{p}$ des Punktes y, von der bereits oben gezeigt ist, dafs sie durch den Punkt s hindurchgeht, und dafs sie zugleich auch jedem Punkte $y + \mathfrak{g}s$ als Polare zugeordnet ist, der auf der Verbindungslinie von y und s gelegen ist.

Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich daher in den Satz zusammenfassen:

Verschwindet das äufsere Produkt der drei Zählerstäbe des Bruches $\boldsymbol{p}$, ohne dafs zugleich alle drei Produkte aus je zweien von diesen Stäben null sind, so zerfällt die Polkurve des Polarsystems $\boldsymbol{p}$ in ein *Linienpaar.* Die Polaren sämtlicher Punkte der Ebene hinsichtlich eines solchen Polarsystems $\boldsymbol{p}$ gehen durch den Doppelpunkt dieses Linienpaars hindurch und werden durch das Linienpaar von ihren Polen harmonisch getrennt. Umgekehrt kann eine jede Gerade, die durch den Doppelpunkt des Linienpaars geht, als Polare *eines jeden* Punktes aufgefafst werden, der von ihr durch das Linienpaar harmonisch getrennt wird, das heifst, der Pol einer solchen Geraden kann auf dem Strahle beliebig gewählt werden, der jener Geraden hinsichtlich des Linienpaars harmonisch zugeordnet ist.

Da der Satz von der Identität der Pol- und Polarkurve nur für den Fall bewiesen ist, wo das äufsere Produkt $[B_1 B_2 B_3] \gtrless 0$ ist, so bedarf die Polarkurve

461) . . . . $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$

bei den ausgearteten Polarsystemen, für welche ja jenes Produkt verschwindet, einer besonderen Untersuchung. Dazu berücksichtige man, dafs bei der soeben betrachteten ersten Art der Ausartung des Polarsystems $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$ die Zähler b_i des adjungierten Bruches

462) . . . . $\boldsymbol{P} = \dfrac{b_1,\ b_2,\ b_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$

ein Vielfaches des Punktes s darstellen müssen. Denn da, wie bewiesen, die drei Zählerstäbe B_i des Bruches $\boldsymbol{\mathfrak{p}}$ durch den Punkt s hindurchgehen, so müssen die Produkte je zweier von ihnen, das heifst also die Zähler des adjungierten Bruches $\boldsymbol{P}$, sofern sie von Null verschieden sind, abgesehen von einem Zahlfaktor den Punkt s liefern. Aber dies Ergebnis läfst sich noch bestimmter formulieren. Multipliziert man nämlich die Gleichung 445) mit B_3, so erhält man die Gleichung

$$-\mathfrak{s}_1 [B_3 B_1] + \mathfrak{s}_2 [B_2 B_3] = 0 \quad \text{oder wegen} \quad 358)$$
$$\mathfrak{s}_1 b_2 = \mathfrak{s}_2 b_1.$$

Aus dieser Gleichung und den beiden cyklisch entsprechenden Gleichungen folgt zunächst, dafs die Punkte b_i, (falls sie nicht null sind), in *einen* Punkt zusammenfallen, und dieser Punkt kann, wie schon oben gezeigt ist, kein anderer sein als der Punkt s. Andererseits entspringt aus diesen Gleichungen die laufende Proportion

463) . . . . $\mathfrak{s}_1 : \mathfrak{s}_2 : \mathfrak{s}_3 = b_1 : b_2 : b_3$,

für die man auch die Doppelgleichung schreiben kann

464) . . . . $\dfrac{b_1}{\mathfrak{s}_1} = \dfrac{b_2}{\mathfrak{s}_2} = \dfrac{b_3}{\mathfrak{s}_3}$.

Und da aufserdem die Punkte b_i mit dem Doppelpunkte s der Polkurve zusammenfallen, so mufs der gemeinschaftliche Wert der drei Brüche 464) ein gewisses Vielfaches von s sein. Man erhält somit die drei Gleichungen

$$\frac{b_i}{\mathfrak{s}_i} = \mathfrak{k} s \quad \text{oder}$$

465) . . . $b_i = \mathfrak{k}\,\mathfrak{s}_i s.$

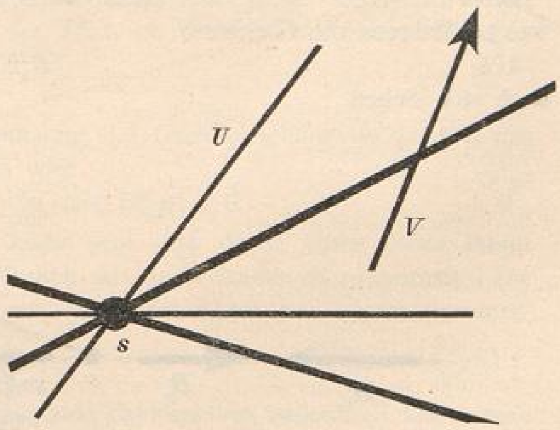


Fig. 87.

Für den adjungierten Bruch 462) ergiebt sich daher die Darstellung

466) . . $\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}\,\dfrac{\mathfrak{s}_1 s,\ \mathfrak{s}_2 s,\ \mathfrak{s}_3 s}{E_1,\ E_2,\ E_3}$.

Ist also

467) $V = \mathfrak{v}_1 E_1 + \mathfrak{v}_2 E_2 + \mathfrak{v}_3 E_3$

ein ganz beliebiger Stab (vgl. Fig. 87), so wird wegen 466) sein Pol

468) $V\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}(\mathfrak{v}_1 \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{v}_2 \mathfrak{s}_2 + \mathfrak{v}_3 \mathfrak{s}_3) s.$

Die hier in der Klammer auftretende Summe ist nun aber mit Rücksicht auf die Werte von V und s (vgl. Gleichung 467) und 450)) gleich dem äufseren Produkte $[Vs]$, und die Gleichung 468) läfst sich daher in der einfacheren Form schreiben

469) . . . . $V\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}[Vs]s,$

welche zeigt, dafs der Pol einer beliebigen Geraden V hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ mit dem Punkte s zusammenfällt, wofern nicht die Gerade des Stabes V selbst durch den Punkt s hindurchgeht.

In diesem Falle nämlich verschwindet der Faktor $[Vs]$, und die Gleichung 469) reduziert sich daher auf die Form

470) . . . . $V\boldsymbol{P}=0,$

welche aussagt, dafs dann der Pol des Stabes V unbestimmt bleibt. Man erhält also den Satz:

Zerfällt die Polkurve eines Polarsystems $\mathfrak{p}$ in ein Linienpaar mit dem Doppelpunkte s, so sind die Stäbe des Strahlbüschels, das den Punkt s zum Scheitel hat, zu dem adjungierten Polarsystem $\boldsymbol{P}$ apolar.

Aendert man ferner in der Gleichung 469) die Bezeichnung, schreibt sie nämlich in der Form
$$U\boldsymbol{P}=\mathfrak{k}[Us]s,$$
und multipliziert sie dann mit U, so findet man für die der Polarkurve des Polarsystems zugehörende quadratische Form $[U\cdot U\boldsymbol{P}]$ die Darstellung

471) . . . . $[U\cdot U\boldsymbol{P}]=\mathfrak{k}[Us]^2,$

das heifst, die quadratische Form $[U\cdot U\boldsymbol{P}]$ ist gleich dem Produkte aus einer Konstanten $\mathfrak{k}$ und dem Quadrat einer linearen Form.

Die Gleichung der gesuchten Polarkurve lautet daher

472) . . . . $[Us]^2=0$

und stellt doppelt zählend dasjenige Strahlbüschel dar, dessen Scheitel der Doppelpunkt s des die Polkurve bildenden Linienpaares ist. Man hat also den Satz:

Zerfällt die Polkurve eines Polarsystems in ein Linienpaar, so artet die Polarkurve des adjungierten Polarsystems in ein doppeltzählendes Strahlbüschel aus, dessen Scheitel der Doppelpunkt des Linienpaares ist.

Der zweite Fall, der beim Verschwinden des Produktes $[B_1B_2B_3]$ *eintreten kann, ist der, wo die sämtlichen drei zweifaktorigen Produkte* $[B_2B_3]$, $[B_3B_1]$, $[B_6B_2]$ *null sind,* wo also die drei Gleichungen bestehen

473) . . . . $[B_2B_3]=[B_3B_1]=[B_1B_2]=0,$

welche übrigens die Gleichung

474) . . . . $[B_1B_2B_3]=0$

nach sich ziehen.

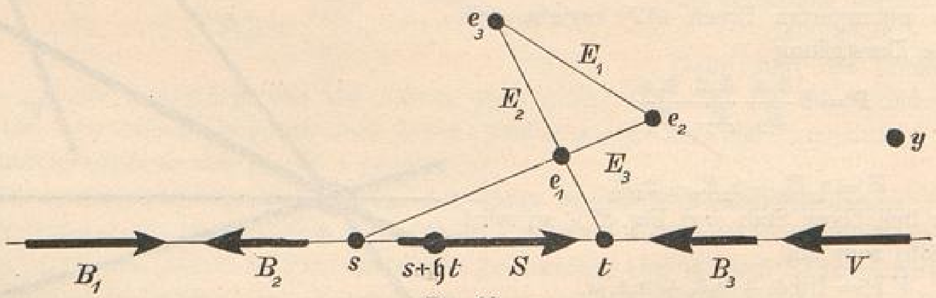


Fig. 88.

Ist dabei wenigstens noch eine von den drei Gröfsen B_i, etwa B_1, von Null verschieden, so werden zwischen den drei Gröfsen B_i zwei Zahlbeziehungen von der Form bestehen müssen
$$B_2=\mathfrak{f}B_1,\quad B_3=\mathfrak{g}B_1\quad \text{oder}$$

475) . . . . $\mathfrak{f}B_1-B_2=0$ und $\mathfrak{g}B_1-B_3=0.$

Diese Gleichungen sagen aus, dafs die drei Stäbe B_1, B_2, B_3, sofern sie nicht null sind, *der nämlichen Geraden angehören* (vgl. Fig. 88).

Bezeichnet man ferner noch die beiden Punkte, die aus den Grundpunkten e_1, e_2, e_3 durch die Koeffizienten der beiden Zahlbeziehungen 475) abgeleitet werden können, mit s und t, setzt also

476) . . . . $s = \mathfrak{f}e_1 - e_2$ und $t = \mathfrak{g}e_1 - e_3$,

so lassen sich die Gleichungen 475) auch in der Form schreiben

477) . . . . $s\boldsymbol{p} = 0$ und $t\boldsymbol{p} = 0$.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst, dafs *die Punkte s und t auf der Geraden der drei Stäbe B_i liegen müssen;* denn es wird

478) . . . . $\begin{cases} [sB_i] = [s \cdot e_i\boldsymbol{p}] = [e_i \cdot s\boldsymbol{p}] = 0. \\ [tB_i] = [t \cdot e_i\boldsymbol{p}] = [e_i \cdot t\boldsymbol{p}] = 0. \end{cases}$

Ferner zeigen die Gleichungen 477), dafs *die beiden Punkte s und t zum Polarsystem $\boldsymbol{p}$ apolar* sind. Dieselbe Eigenschaft besitzt aber offenbar auch jeder Punkt $s + \mathfrak{h}t$ der Geraden

479) . . . . $S = [st]$.

In der That folgt aus den Gleichungen 477) für ganz beliebige Werte der Zahlgröfse $\mathfrak{h}$ die Gleichung

480) . . . . $(s + \mathfrak{h}t)\boldsymbol{p} = 0$,

welche wirklich aussagt, dafs überhaupt *jeder Punkt der Geraden S zum Polarsystem $\boldsymbol{p}$ apolar ist.* Diese Gleichung 480) ist zugleich für die geometrische Deutung der neuen Ausartung des Polarsystems am geeignetsten.

Multipliziert man sie nämlich äufserlich mit dem Punkte $s + \mathfrak{h}t$, so erhält man die Gleichung

481) . . . . $[(s + \mathfrak{h}t) \cdot (s + \mathfrak{h}t)\boldsymbol{p}] = 0$,

welche besagt:

Jeder Punkt $s + \mathfrak{h}t$ der Geraden $S = [st]$ liegt auf der Polkurve des Polarsystems $\boldsymbol{p}$.

Aber die Gleichung 480) zeigt zugleich, dafs *die Polare eines jeden beliebigen Punktes der Ebene mit der Geraden S zusammenfällt.* In der That, ist V die Polare eines beliebigen Punktes y, also

482) . . . . $V = y\boldsymbol{p}$,

so folgert man aus der Gleichung 480) unter Benutzung der Grundgleichung 443), dafs das äufsere Produkt $[(s + \mathfrak{h}t)V]$ verschwindet; denn es wird

483) . . . . . $[(s + \mathfrak{h}t)V] = [(s + \mathfrak{h}t) \cdot y\boldsymbol{p}] = [y \cdot (s + \mathfrak{h}t)\boldsymbol{p}] = 0$.

Die Polare V eines beliebigen Punktes y der Ebene geht also durch einen jeden Punkt $s + \mathfrak{h}t$ der Geraden S hindurch und fällt somit wirklich mit der Geraden S zusammen. Die beiden Stäbe V und S können sich daher nur um einen Zahlfaktor von einander unterscheiden, und man kann die Gleichung ansetzen

484) . . . . $V = y\boldsymbol{p} = \mathfrak{r}_{(y)}S$,

in welcher der Faktor $\mathfrak{r}_{(y)}$ eine vom Punkte y abhängende Zahlfunktion bedeutet. Bildet man insbesondere diejenigen drei Specialgleichungen, die aus der Gleichung 484) hervorgehen, wenn man den Punkt y durch die drei Ecken e_i des Fundamentaldreiecks ersetzt, und bezeichnet die Werte, welche die Funktion $\mathfrak{r}_{(y)}$ für die Argumente e_1, e_2, e_3 annimmt, mit $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, so erhält man die drei Gleichungen

485) . . . . $B_1 = e_1\boldsymbol{p} = \mathfrak{r}_1 S$, $B_1 = e_2\boldsymbol{p} = \mathfrak{r}_2 S$, $B_3 = e_3\boldsymbol{p} = \mathfrak{r}_3 S$.

Die geometrische Bedeutung der hier auftretenden Zahlgröfsen $\mathfrak{r}_i$ ergiebt sich leicht aus den Grundgleichungen des Polarsystems

486) . . . . $[e_i \cdot e_k\boldsymbol{p}] = [e_k \cdot e_i\boldsymbol{p}]$.

Führt man nämlich in diese Gleichungen anstatt der Produkte

$e_k \boldsymbol{p}$ und $e_i \boldsymbol{p}$ ihre Werte

$\mathfrak{r}_k S$ und $\mathfrak{r}_i S$ aus 485) ein, so bekommt man die Gleichungen

$\mathfrak{r}_k [e_i S] = \mathfrak{r}_i [e_k S]$, für die man, wenn man noch

487) $\quad S = \mathfrak{S}_1 E_1 + \mathfrak{S}_2 E_2 + \mathfrak{S}_3 E_3$ setzt, auch schreiben kann

488) $\quad \mathfrak{r}_k \mathfrak{S}_i = \mathfrak{r}_i \mathfrak{S}_k$.

Aus diesen Gleichungen aber folgt die laufende Proportion

$$\mathfrak{r}_1 : \mathfrak{r}_2 : \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{S}_1 : \mathfrak{S}_2 : \mathfrak{S}_3,$$

welche wiederum gleichbedeutend ist mit den Proportionalitätsgleichungen

489) $\quad \mathfrak{r}_i = \mathfrak{k} \mathfrak{S}_i,$

in denen $\mathfrak{k}$ einen konstanten Zahlfaktor bezeichnet. Die Gleichungen 485) verwandeln sich daher in

490) $\quad B_1 = \mathfrak{k}\, \mathfrak{S}_1 S, \quad B_2 = \mathfrak{k}\, \mathfrak{S}_2 S, \quad B_3 = \mathfrak{k}\, \mathfrak{S}_3 S,$

und es wird also

491) $\quad \boldsymbol{p} = \mathfrak{k}\, \dfrac{\mathfrak{S}_1 S,\ \mathfrak{S}_2 S,\ \mathfrak{S}_3 S}{e_1,\quad e_2,\quad e_3}.$

Aus dieser Darstellung des Bruches $\boldsymbol{p}$ kann man zunächst eine Bestätigung dafür ablesen, dafs jeder beliebige Punkt y der Ebene

492) $\quad y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3$

durch den Bruch $\boldsymbol{p}$ in einen Stab der Geraden S übergeführt wird; denn durch Multiplikation der Gleichungen 492) und 491) erhält man für die Polare $y\boldsymbol{p}$ des Punktes y den Wert

$$y\boldsymbol{p} = \mathfrak{k}(\mathfrak{y}_1 \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{y}_2 \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{y}_3 \mathfrak{S}_3)\, S,$$

oder mit Rücksicht auf 492) und 487) den Ausdruck

493) $\quad y\boldsymbol{p} = \mathfrak{k}[yS]\, S,$

welcher in der That zeigt, dafs die Polare eines ganz beliebigen Punktes y der Ebene sich nur durch den Zahlfaktor

$$\mathfrak{r}_{(y)} = \mathfrak{k}\,[yS]$$

von dem Stabe S unterscheidet.

Um ferner die Gestalt der Polkurve

494) $\quad [x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0$

für die neue Ausartung des Polarsystems, das heifst für einen Bruch $\boldsymbol{p}$, zu ermitteln, dessen Zähler den Gleichungen 473) genügen, multipliziere man die Gleichung

495) $\quad x\boldsymbol{p} = \mathfrak{k}[xS]\, S,$

die aus 493) durch Substitution von x an Stelle von y hervorgeht, mit x und erhält so für die linke Seite der Gleichung 494) die Darstellung

496) $\quad [x \cdot x\boldsymbol{p}] = \mathfrak{k}\,[xS]^2$

und damit den Satz:

Bei der durch die Gleichungen 473) definierten Ausartung eines Polarsystems $\boldsymbol{p}$ ist die seiner Polkurve zugehörende quadratische Form $[x \cdot x\boldsymbol{p}]$ das Produkt aus einer Konstanten und dem Quadrat einer linearen Form.

Die Gleichung der Polkurve nimmt daher die Gestalt an

497) $\quad [xS]^2 = 0,$

und man hat somit den Satz:

Verschwinden bei einem Polarsysteme $\boldsymbol{p}$ alle drei Produkte aus je zweien von seinen Zählern, so besteht seine Polkurve aus einer doppelt zählenden Geraden; mit dieser Geraden fallen zugleich die Polaren sämtlicher Punkte der Ebene hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{p}$ zusammen.

Die adjungierte Verwandtschaft bietet in diesem Falle wenig Interesse. Infolge der Gleichungen 473) nimmt nämlich der Ausdruck für den adjungierten Bruch

498) . . . . $P = \frac{[B_2 B_3],\ [B_3 B_1],\ [B_1 B_2]}{E_1,\ E_2,\ E_3}$ die Form an

499) . . . . $P = \frac{0,\ 0,\ 0}{E_1,\ E_2,\ E_3}$;

und es wird daher überhaupt für jeden beliebigen Stab V der Ebene

500) . . . . $VP = 0$,

das heifst, man hat den Satz:

Artet die Polkurve eines Polarsystems p in eine doppelt zählende Gerade aus, so ist in Bezug auf das adjungierte Polarsystem P jeder beliebige Stab V der Ebene apolar.

Man gelangt zu den beiden dualistisch entsprechenden Ausartungen des Polarsystems, wenn man von dem Bruche

501) . . . . $P = \frac{b_1,\ b_2,\ b_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$

ausgeht, diesen Bruch aber nicht wie bisher als adjungierten Bruch zu einem primitiven Bruche P auffafst, sondern selbst als einen ursprünglichen Bruch behandelt, zu dem erst ein adjungierter Bruch p gebildet werden soll. Dabei seien im übrigen die bisherigen Bezeichnungen festgehalten. Es seien also die drei Zähler b_i des Bruches P aus den drei Nennerprodukten

502) . . . . $e_1 = [E_2 E_3],\ e_2 = [E_3 E_1],\ e_3 = [E_1 E_2]$

durch neun Ableitzahlen $\mathfrak{B}_{ik}$ abgeleitet, also als Vielfachensummen

503) . . . . $b_i = \mathfrak{B}_{i1} e_1 + \mathfrak{B}_{i2} e_2 + \mathfrak{B}_{i3} e_3$

dargestellt, in denen die $\mathfrak{B}_{ik}$ den Bedingungen genügen

504) . . . . $\mathfrak{B}_{ik} = \mathfrak{B}_{ki}$.

Aus diesen folgt, wie oben gezeigt ist, dafs für beliebige Stäbe V und W die Grundgleichung des Polarsystems besteht

505) . . . . $[W \cdot VP] = [V \cdot WP]$.

Man setze dann entsprechend der dualistischen Entwickelung voraus, dafs das Produkt der drei Zähler b_i des Bruches P, das heifst das Produkt

506) . . . . $[b_1 b_2 b_3] = 0$

ist, und unterscheide auch hier die beiden Unterfälle, wo wenigstens *eins von den drei zweifaktorigen Produkten* $[b_2 b_3]$, $[b_3 b_1]$, $[b_1 b_2]$ *von Null verschieden ist*, und wo *alle drei Produkte gleichzeitig verschwinden*.

Im ersten Falle besteht zwischen den drei Zählern b_i des Bruches P *eine und nur eine* Zahlbeziehung, sie möge lauten:

507) . . . . $\mathfrak{S}_1 b_1 + \mathfrak{S}_2 b_2 + \mathfrak{S}_3 b_3 = 0$

und sagt aus, dafs die drei Punkte b_i einer und derselben Geraden angehören (vgl. Fig. 89).

Bezeichnet man ferner denjenigen Stab, dessen Ableitzahlen die Koeffizienten der Zahlbeziehung 507) sind, mit S, setzt also

508) . . . . $S = \mathfrak{S}_1 E_1 + \mathfrak{S}_2 E_2 + \mathfrak{S}_3 E_3$,

so kann man wegen 501) die Gleichung 507) durch die Gleichung ersetzen

509) . . . . $SP = 0$,

welche den weiteren Folgerungen zu Grunde gelegt werden soll.

Zunächst kann man dieser Gleichung wiederum die Form geben

510) . . . . $SP = 0 \cdot z$,

in der z einen ganz beliebigen Punkt bedeutet, und welche daher aussagt, dafs der Pol des Stabes S hinsichtlich des Polarsystems P unbestimmt bleibt, oder, wie wir sagen wollen, dafs der Stab S *zum Polarsystem P apolar* ist.

Ferner folgt aus der Gleichung 509), dafs *die Gerade S der Polarkurve des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ angehört,* denn der Stab S mufs ja auch der Gleichung genügen

511) . . . . $[S \cdot S\boldsymbol{P}] = 0.$

Aber die Gleichung 509) zeigt zugleich, dafs *die Gerade des Stabes S auch durch alle drei Grundpunkte hindurchgehen mufs.* In der That erhält man mit Rücksicht auf die Grundgleichung 505) für die Produkte $[Sb_i]$ die Darstellung

512) . . . . $[Sb_i] = [S \cdot E_i\boldsymbol{P}] = [E_i \cdot S\boldsymbol{P}] = 0,$

aus der die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung hervorgeht. Aber wie man sofort bemerkt, liegen nicht nur die Pole der Grundstäbe, sondern überhaupt die Pole *sämtlicher*

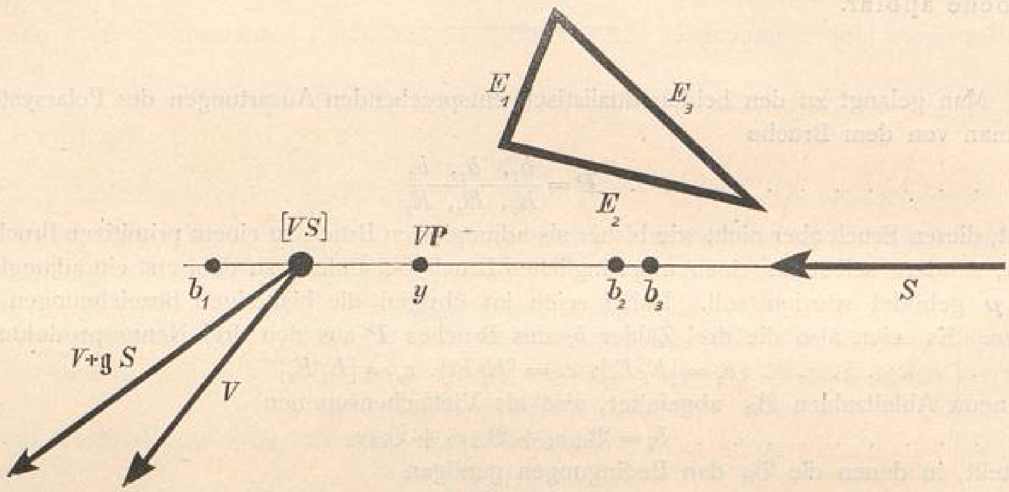


Fig. 89.

Stäbe der Ebene auf der Geraden des Stabes S. Ist nämlich y der Pol eines ganz beliebigen Stabes V, also

513) . . . . $y = V\boldsymbol{P},$

so wird wieder das Produkt

514) . . . . $[Sy] = [S \cdot V\boldsymbol{P}] = [V \cdot S\boldsymbol{P}] = 0.$

Sieht man daher davon ab, dafs zufolge der Gleichung 510) jeder beliebige Punkt x der Ebene, wenn man sich ihn mit dem Koeffizienten 0 behaftet denkt, als Pol der Geraden S aufgefafst werden kann, so bleiben als Pole von Geraden der Ebene nur solche Punkte übrig, die auf der Geraden des Stabes S liegen.

Dafür aber gehört dann umgekehrt jedem auf der Geraden S liegenden Punkte y, der einer beliebigen Geraden V der Ebene als Pol zugeordnet ist, für den also die Gleichung besteht

513) . . . . $y = V\boldsymbol{P},$

als Polare *nicht nur* jene eine Gerade V zu, sondern zugleich auch die sämtlichen Geraden $V + \mathfrak{g}S$ desjenigen Strahlbüschels, das den Schnittpunkt der Geraden V und S zum Scheitel hat. Wegen 509) wird nämlich

515) . . . . $(V + \mathfrak{g}S)\boldsymbol{P} = V\boldsymbol{P} + \mathfrak{g}S\boldsymbol{P} = V\boldsymbol{P} = y,$

das heifst, der Punkt y kann als Pol einer jeden Geraden $V + \mathfrak{g}S$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[VS]$ aufgefafst werden.

Um die Gestalt der Polarkurve

516) . . . . $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$

bei der neuen Ausartung des Polarsystems kennen zu lernen, zeige man zunächst in derselben Weise wie bei einem beliebigen Polarsystem, dafs man von jedem Punkte $[VW]$, der nicht auf der Geraden S liegt (vgl. Fig. 90), zwei Tangenten U_1 und U_2 an die Polarkurve legen kann. Man substituiere dazu wieder in die Gleichung 516) statt U den Ausdruck $V + \mathfrak{h}W$ für einen beliebigen Strahl des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[VW]$ und erhält so die in $\mathfrak{h}$ quadratische Gleichung

517) $$[V \cdot V\boldsymbol{P}] + 2\mathfrak{h}[W \cdot V\boldsymbol{P}] + \mathfrak{h}^2[W \cdot W\boldsymbol{P}] = 0.$$

Sind $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ ihre beiden Wurzeln, so sind

$$U_1 = V + \mathfrak{h}_1 W \quad \text{und} \quad U_2 = V + \mathfrak{h}_2 W$$

die beiden Tangenten, die sich vom Punkte $[VW]$ an die Polarkurve legen lassen, und diese Tangenten können aus demselben Grunde wie bei der dualistischen Entwickelung (vgl. S. 141 f.) auch *nicht in eine einzige Gerade zusammenfallen.*

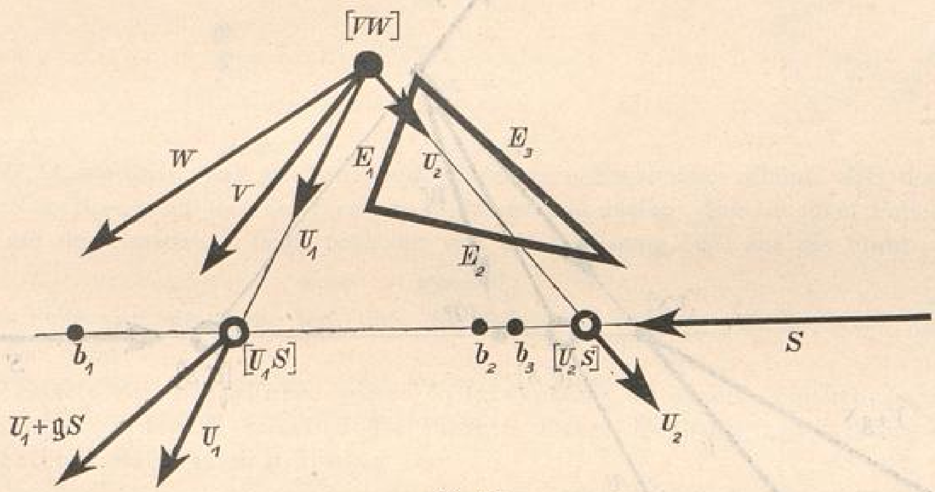


Fig. 90.

Dann aber folgt weiter aus der für die Ausartung charakteristischen Gleichung 509), dafs der Polarkurve auch *jede Gerade derjenigen beiden Strahlbüschel angehört, deren Scheitel die Punkte $[U_1 S]$ und $[U_2 S]$ sind.* Denn jeder Strahl $U_i + \mathfrak{g}S$ $(i = 1, 2)$ eines dieser beiden Strahlbüschel genügt der Gleichung 516). Setzt man nämlich den Ausdruck $U_i + \mathfrak{g}S$ in die linke Seite von 516) ein, so verwandelt sie sich in die Summe

$$[U_i \cdot U_i\boldsymbol{P}] + 2\mathfrak{g}[U_i \cdot S\boldsymbol{P}] + \mathfrak{g}^2[S \cdot S\boldsymbol{P}];$$

und von dieser verschwinden die beiden letzten Glieder wegen 509), und das erste Glied, weil nach der Voraussetzung die beiden Geraden U_i der Polarkurve angehören. Die Polarkurve wird daher von sämtlichen Geraden der beiden Strahlbüschel berührt, welche die Punkte $[U_1 S]$ und $[U_2 S]$ zu Scheiteln und daher die Gerade S zum Doppelstrahl haben; und da sie von der zweiten Klasse ist, so kann sie aufser den Geraden dieser beiden Strahlbüschel auch keine weiteren Geraden enthalten. Das Umhüllungsgebilde der Geraden der Polarkurve zerfällt daher in das Punktpaar $[U_1 S]$ und $[U_2 S]$, dessen Verbindungslinie die ausgezeichnete Gerade S des Polarsystems ist.

Die Parameter $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ der beiden Geraden U_1 und U_2 werden entgegengesetzt gleich, das heifst, der Strahlwurf VWU_1U_2 wird harmonisch (vgl. Fig. 91), wenn der Koeffizient von $\mathfrak{h}$ in der Gleichung 517) verschwindet, wenn also die Gleichung besteht

$$[W \cdot V\boldsymbol{P}] = 0.$$

Dann geht die Gerade W durch den Pol $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V hindurch, von dem bereits oben gezeigt wurde, dafs er auf der Geraden des Stabes S liegt, und dafs er zugleich einer jeden Geraden $V + \mathfrak{g}S$ als Pol zugeordnet ist, die durch den Schnittpunkt $[VS]$ der Geraden V und S geht. Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich daher in den Satz zusammenfassen:

Verschwindet das äufsere Produkt der drei Zählerpunkte des Bruches $\boldsymbol{P}$, ohne dafs zugleich alle drei Produkte aus je zweien von diesen Punkten null sind, so zerfällt die Polarkurve des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ in ein *Punktpaar*. Die Pole sämtlicher Geraden der Ebene hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ liegen auf der geraden Verbindungslinie des Punktpaars und werden durch das Punktpaar von ihren

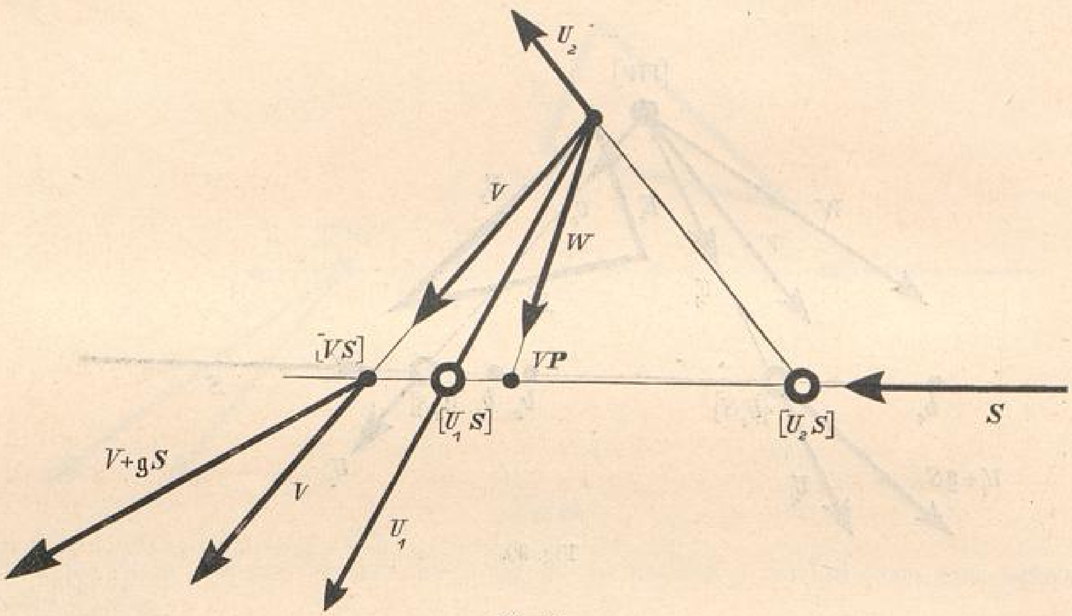


Fig. 91.

Polaren harmonisch getrennt. Umgekehrt kann ein jeder Punkt, der auf der Verbindungslinie des Punktpaars liegt, als Pol *einer jeden* Geraden aufgefafst werden, die von ihm durch das Punktpaar harmonisch getrennt ist, das heifst, die Polare eines solchen Punktes kann in dem Strahlbüschel beliebig gewählt werden, dessen Scheitel jenem Punkte hinsichtlich des Punktpaars harmonisch zugeordnet ist.

Der zu dem Bruche $\boldsymbol{P}$ adjungierte Bruch

518) . . . . $$\bar{p} = \frac{[b_2 b_3],\ [b_3 b_1],\ [b_1 b_2]}{e_1,\ \ e_2,\ \ e_3}$$

läfst sich auf dieselbe Weise umformen wie der Bruch $\boldsymbol{P}$ bei der entsprechenden Ausartung in der dualistischen Entwickelung (vgl. S. 143) und nimmt dadurch die Gestalt an

519) . . . . $$\bar{p} = \mathfrak{k}\,\frac{\mathfrak{S}_1 S,\ \mathfrak{S}_2 S,\ \mathfrak{S}_3 S}{e_1,\ \ e_2,\ \ e_3}$$

in der $\mathfrak{k}$ einen Zahlfaktor bedeutet. Einem beliebigen Punkt der Ebene

520) . . . . $$y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3$$

(vgl. Fig. 92) wird daher durch den Bruch $\bar{\boldsymbol{p}}$ die Gerade

521) . . . . $y\bar{\boldsymbol{p}} = \mathfrak{k}(\mathfrak{y}_1\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{y}_2\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{y}_3\mathfrak{S}_3)\,S$

zugewiesen, oder was dasselbe ist, die Gerade

522) . . . . $y\bar{\boldsymbol{p}} = \mathfrak{k}\,[yS]\,S.$

Diese Darstellung der Polare des Punktes y zeigt, dafs der zu $\boldsymbol{P}$ adjungierte Bruch $\bar{\boldsymbol{p}}$ jedem beliebigen Punkte y der Ebene als Polare die Verbindungslinie S der Punkte des Punktpaars

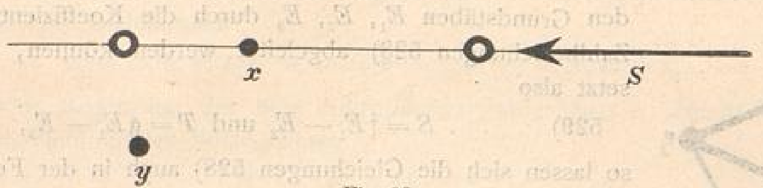


Fig. 92.

$[U_1 S]$, $[U_2 S]$ zuordnet, was zu dem oben gewonnenen Ergebnisse stimmt, dafs der Pol der Geraden S in Bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{P}$ unbestimmt bleibt. Nur in dem Falle, wo der Punkt y auf der Geraden S liegt, reduciert sich die Gleichung 522) auf die Form

523) . . . . $y\bar{\boldsymbol{p}} = 0;$

in diesem Falle sagt sie daher aus, dafs die Polare des Punktes y unbestimmt wird. Man hat also den Satz:

Zerfällt die Polarkurve eines Polarsystems $\boldsymbol{P}$ in ein Punktpaar mit der Verbindungsgeraden S, so sind die Punkte dieser Verbindungsgeraden zu dem adjungierten Polarsystem $\bar{\boldsymbol{p}}$ apolar.

Überdies zeigt der Vergleich der Gleichungen 519) und 491), dafs der Bruch $\bar{\boldsymbol{p}}$ genau mit demjenigen Bruche $\boldsymbol{p}$ übereinstimmt, der sich oben in der dualistischen Entwickelung bei der Untersuchung der *zweiten* Ausartung des Polarsystems ergab, und man kann daher zu den bisher gewonnenen Eigenschaften der Verwandtschaft $\bar{\boldsymbol{p}}$ noch das dort gefundene Ergebnis hinzufügen: Die quadratische Form, welche der Polkurve des Polarsystems $\bar{\boldsymbol{p}}$ zugehört, gestattet die Darstellung

524) . . . . $[x \cdot x\bar{\boldsymbol{p}}] = \mathfrak{k}\,[xS]^2.$

Die Gleichung der Polkurve lautet daher

525) . . . . $[xS]^2 = 0$

und stellt somit die doppelt zu zählende Gerade S dar. Hierin liegt der Satz:

Zerfällt die Polarkurve eines Polarsystems $\boldsymbol{P}$ in ein Punktpaar, so artet die Polkurve des adjungierten Polarsystems $\bar{\boldsymbol{p}}$ in die doppelt zählende Verbindungsgerade der Punkte dieses Punktpaars aus.

Der zweite Fall endlich, der beim Verschwinden des Produktes $[b_1 b_2 b_3]$ *eintreten kann, ist wieder der, wo die sämtlichen zweifaktorigen Produkte* $[b_2 b_3]$, $[b_3 b_1]$, $[b_1 b_2]$ *null sind,* wo also die drei Gleichungen bestehen

526) . . . . $[b_2 b_3] = [b_3 b_1] = [b_1 b_2] = 0,$

aus denen dann schon die Gleichung

527) . . . . $[b_1 b_2 b_3] = 0$

folgt. Ist dabei wenigstens noch eine von den drei Gröfsen b_i, etwa b_1 von Null verschieden, so werden zwischen den drei Gröfsen b_i zwei Zahlbeziehungen von der Form bestehen müssen

$$b_2 = \mathfrak{f} b_1 \quad \text{und} \quad b_3 = \mathfrak{g} b_1 \quad \text{oder}$$

528) . . . . $\mathfrak{f} b_1 - b_2 = 0$ und $\mathfrak{g} b_1 - b_3 = 0$,

welche aussagen, dafs die drei Punkte b_i, sofern sie nicht null sind, *in einen Punkt zusammenfallen* (vgl. Fig. 93).

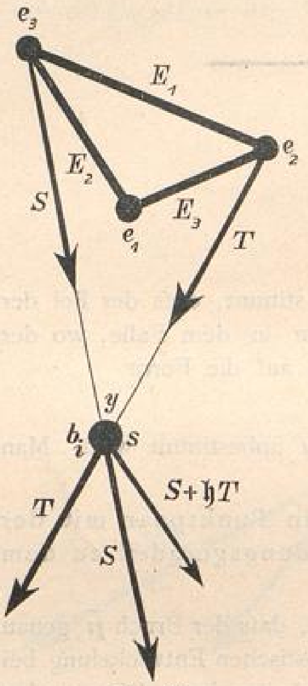


Fig. 93.

Bezeichnet man dann wieder die beiden Stäbe, die aus den Grundstäben E_1, E_2, E_3 durch die Koeffizienten der beiden Zahlbeziehungen 528) abgeleitet werden können, mit S und T, setzt also

529) . . . $S = \mathfrak{f} E_1 - E_2$ und $T = \mathfrak{g} E_1 - E_3$,

so lassen sich die Gleichungen 528) auch in der Form schreiben

530) . . . . . $S\boldsymbol{P} = 0$ und $T\boldsymbol{P} = 0$.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst, dafs *die Geraden der Stäbe S und T durch denjenigen Punkt hindurchgehen müssen, in den die drei Punkte b_i zusammengefallen sind.* Denn es wird

531) . . . . $$\begin{cases} [Sb_i] = [S \cdot E_i\boldsymbol{P}] = [E_i \cdot S\boldsymbol{P}] = 0 \\ [Tb_i] = [T \cdot E_i\boldsymbol{P}] = [E_i \cdot T\boldsymbol{P}] = 0. \end{cases}$$

Ferner zeigen sie, dafs *die Geraden S und T zum Polarsystem $\boldsymbol{P}$ apolar* sind. Dieselbe Eigenschaft besitzt aber offenbar auch jede Gerade $S + \mathfrak{h} T$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel

532) . . . . $s = [ST]$.

In der That folgt aus den Gleichungen 531) für ganz beliebige Werte der Zahlgröfse $\mathfrak{h}$ die Gleichung

533) . . . . . . $(S + \mathfrak{h} T)\boldsymbol{P} = 0$,

welche wirklich aussagt, dafs überhaupt *jede Gerade des Strahlbüschels mit dem Scheitel s zum Polarsystem $\boldsymbol{P}$ apolar ist.* An diese Gleichung 533) lassen sich wiederum am leichtesten die weiteren Folgerungen knüpfen.

Multipliziert man sie zunächst äufserlich mit dem Stabe $S + \mathfrak{h} T$, so erhält man die Gleichung

534) . . . . $[(S + \mathfrak{h} T) \cdot (S + \mathfrak{h} T)\boldsymbol{P}] = 0$,

welche den Satz enthält:

Jede Gerade $S + \mathfrak{h} T$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel $s = [ST]$ gehört der Polarkurve des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ an.

Aber die Gleichung 533) zeigt zugleich, dafs *der Pol eines jeden beliebigen Stabes der Ebene mit dem Punkte s zusammenfällt.* In der That, ist y der Pol eines beliebigen Stabes V, also

535) . . . . $y = V\boldsymbol{P}$,

so folgert man aus der Gleichung 533) unter Benutzung von 505), dafs das äufsere Produkt $[(S + \mathfrak{h} T)y]$ verschwindet; denn es wird

536) . . . $[(S + \mathfrak{h} T)y] = [(S + \mathfrak{h} T) \cdot V\boldsymbol{P}] = [V \cdot (S + \mathfrak{h} T)\boldsymbol{P}] = 0$.

Der Pol y einer beliebigen Geraden V der Ebene liegt also auf einer jeden Geraden $S + \mathfrak{h} T$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel s und fällt somit wirklich mit dem Punkte s zusammen.

Die beiden Punkte y und s können sich daher nur um einen Zahlfaktor von einander unterscheiden, und man kann die Gleichung ansetzen

537) . . . . $y = V\boldsymbol{P} = \mathfrak{r}_{(V)}s,$

wo $\mathfrak{r}_{(V)}$ eine Zahlfunktion bedeutet, die von dem Stabe V abhängt. Bildet man insbesondere diejenigen drei Specialgleichungen, die aus der Gleichung 537) hervorgehen, wenn man den Stab V durch die drei Grundstäbe E_i des Fundamentaldreiecks ersetzt, und bezeichnet die Werte, welche die Funktion $\mathfrak{r}_{(V)}$ für die Argumente E_1, E_2, E_3 annimmt, mit $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, so erhält man die drei Gleichungen

538) . . . . . $b_1 = E_1\boldsymbol{P} = \mathfrak{r}_1 s,\ \ b_2 = E_2\boldsymbol{P} = \mathfrak{r}_2 s,\ \ b_3 = E_3\boldsymbol{P} = \mathfrak{r}_3 s.$

Die geometrische Bedeutung der hier auftretenden Zahlgröfsen $\mathfrak{r}_i$ ergiebt sich wieder leicht aus der Grundgleichung des Polarsystems

539) . . . . $[E_i \cdot E_k\boldsymbol{P}] = [E_k \cdot E_i\boldsymbol{P}].$

Führt man nämlich in diese Gleichung anstatt der Produkte

$E_k\boldsymbol{P}$ und $E_i\boldsymbol{P}$ ihre Werte

$\mathfrak{r}_k s$ und $\mathfrak{r}_i s$ aus 538) ein, so erhält man

$\mathfrak{r}_k[E_i s] = \mathfrak{r}_i[E_k s]$, für die man, wenn man noch

540) . . . . $s = \mathfrak{s}_1 e_1 + \mathfrak{s}_2 e_2 + \mathfrak{s}_3 e_3$ setzt, auch schreiben kann

541) . . . . $\mathfrak{r}_k\,\mathfrak{s}_i = \mathfrak{r}_i\,\mathfrak{s}_k.$

Und diese drei Produktengleichungen lassen sich wieder durch die Proportionalitätsgleichungen ersetzen

542) . . . . $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{k}\,\mathfrak{s}_i,$

in denen $\mathfrak{k}$ einen konstanten Zahlfaktor bedeutet. Die Gleichungen 538) verwandeln sich daher in

543) . . . . $b_1 = \mathfrak{k}\,\mathfrak{s}_1 s,\ \ b_2 = \mathfrak{k}\,\mathfrak{s}_2 s,\ \ b_3 = \mathfrak{k}\,\mathfrak{s}_3 s,$

und es wird also

544) . . . . $\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}\dfrac{\mathfrak{s}_1 s,\ \ \mathfrak{s}_2 s,\ \ \mathfrak{s}_3 s}{E_1,\ \ E_2,\ \ E_3}.$

Aus dieser Form des Bruches $\boldsymbol{P}$ folgt dann wieder wie bei der dualistischen Entwickelung für den Pol $V\boldsymbol{P}$ eines beliebigen Stabes V der Ausdruck

545) . . . . $V\boldsymbol{P} = \mathfrak{k}[Vs]s,$

und man erhält zugleich für die der Polarkurve zugehörige quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{P}]$ die Darstellung

546) . . . . $[U \cdot U\boldsymbol{P}] = \mathfrak{k}[Us]^2$

und damit den Satz:

Bei der durch die Gleichungen 526) definierten Ausartung des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ ist die seiner Polarkurve zugehörende quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{P}]$ das Produkt aus einer Konstanten und dem Quadrat einer linearen Form.

Die Gleichung der Polkurve läfst sich daher auch in der Form schreiben:

547) . . . . $[Us]^2 = 0,$

und es ergiebt sich also der Satz:

Verschwinden bei einem Polarsystem $\boldsymbol{P}$ alle drei Punkte aus je zweien von seinen drei Zählern, so besteht seine Polarkurve aus einem doppeltzählenden Punkt. Mit diesem Punkte fallen zugleich die Pole sämtlicher Geraden der Ebene hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ zusammen.

Die adjungierte Verwandtschaft bietet auch hier wenig Interesse. Denn der adjungierte Bruch $\overline{p}$ nimmt wegen 526) die Form an:

548) . . . . $\overline{p} = \dfrac{0,\ 0,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3}$.

Es wird daher überhaupt für jeden Punkt y der Ebene das Produkt

549) . . . . $y\overline{p} = 0$,

das heifst, man hat den Satz:

Artet die Polkurve eines Polarsystems P in ein doppeltzählendes Strahlbüschel aus, so ist zu dem adjungierten Polarsystem $\overline{p}$ jeder beliebige Punkt y der Ebene apolar.

(Fortsetzung folgt.)