7. Sekundärliteratur

Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen der Realschule I. Ordnung im Waisenhause zu Halle am ... in dem Versammlungssaale des neuen ...

Halle (Saale), 1838

Einleitung.

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Anfangsgründe der Differentialrechnung.

Einleitung.

1. Eine Größe heißt veränderlich, wenn sie beliebige Werthe annehmen kann; beständig (constant), wenn sie nur bestimmte Werthe erhalten soll. Beständige Größen werden durch die ersten, veränderliche durch die letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

2. Stehen zwei veränderliche Größen in solchem Zusammenhange, daß die Werthe der einen sich ergeben, wenn für die andere beliebige Werthe angenommen werden: so heißt die erste Größe die abhängige, die zweite die unabhängige Veränderliche, oder die erste ist eine Function der zweiten; z. B. $y = gx^2$, $y = \sqrt{2rx - x^2}$. Eine veränderliche Größe kann Function von mehreren unabhängigen Veränderlichen sein: z. B. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $u = 2(xy + yz + xz)$, $v = xyz$. Die abhängige Veränderliche ist entweder entwickelte, oder unentwickelte Function der unabhängigen Veränderlichen: z. B. $y = A^x$ und $(y - b)^2 + (x - a)^2 - r^2 = 0$. Bezeichnung der ersteren durch $y = f(x)$, $z = F(x, y), \ldots$, der letzteren durch $f(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$.

3. Wenn die Werthe einer Veränderlicheu sich einem festen Werthe so nähern, daß sie von demselben um weniger verschieden sein können, als jede beliebig kleine Größe: so heißt dieser feste Werth die Gränze der Werthe jener Veründerlichen. So ist der Kreis die Gränze der umschriebenen und eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke. Ist Null die Gränze einer Veränderlichen, so wird dieselbe kleiner, als jede beliebig kleine Größe, und heißt unendlich klein. Soll die Veränderliche unbegränzt wachsen, also größer sein, als jede beliebige Größe, so heißt sie unendlich groß, und wird durch $\frac{1}{0}$ oder ∞ bezeichnet. Die Gränze, welcher sich ein Ausdruck von x für einen besondern Werth von x nähert, soll durch lim. (limite) angedeutet werden.

4. Oft erscheint solche Gränze unter unbestimmter Form, ohne unbestimmt zu sein. So ist $\frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ für $x = 0$. Es ist aber für beliebig kleine Werthe von x immer $\sin x < x < \operatorname{tang} x$, folglich $\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tang} x}$, oder $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Aber $\lim. \cos x = 1$ für $x = 0$, folglich auch

$$1)\ \lim. \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ für } x = 0.$$

Ferner ist
$$\frac{\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ für } x = 0.$$

Es ist aber
$$\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x) = \frac{1}{\log A}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\right),$$

folglich $\frac{\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x)}{x} = \frac{1}{\log A}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \ldots\right)$, folglich auch

2) $\lim. \frac{\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x)}{x} = \frac{1}{\log A}$ für $x = 0$; und 3) $\lim. \frac{x}{\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x)} = \log A$*) für $x = 0$.

Für die natürlichen Logarithmen ist daher $\lim. \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{\log e} = 1$ für $x = 0$.

Eben so ist $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$ für $x = 0$. Aber $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin\frac{1}{2}x^2}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}$
$= \operatorname{tg}\frac{1}{2}x = 0$ für $x = 0$.

Ferner $\frac{b\sqrt{2ax - x^2}}{ax} = \frac{0}{0}$ für $x = 0$. Aber $\frac{b\sqrt{2ax-x^2}}{ax} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a}{x} - 1}$
$= \infty$ für $x = 0$.

Es kann also der Werth eines Quotienten, dessen Glieder unendlich klein werden, eine bestimmte angebbare Zahl, oder auch Null zur Gränze haben, oder über jede Gränze hinaus wachsen.

Die abgeleiteten Functionen und die Taylorsche Reihe.

5. Wenn in $y = f(x)$ die unabhängige Veränderliche x sich um den beliebigen Werth Δx ändert, so geht $f(x)$ in $f(x + \Delta x)$ über; und wenn man die daraus her-

*) Durch log soll der Neper'sche oder natürliche Logarithmus bezeichnet werden.

vorgehende Aenderung des Werthes von y durch Δy bezeichnet, so ist $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Wird hiervon $y = f(x)$ abgezogen, so findet man $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Der Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

drückt das Verhältniß der Aenderung der abhängigen zur Aenderung der unabhängigen Veränderlichen aus, und heißt Aenderungsverhältniß oder Differenzenquotient.

Ist z. B. $y = gx^2$, so ist $y + \Delta y = g(x + \Delta x)^2 = gx^2 + 2gx \,.\, \Delta x + g \,.\, \Delta x^2$. Wird hiervon $y = gx^2$ abgezogen, so kommt $\Delta y = 2gx \,.\, \Delta x + g \,.\, \Delta x^2$, folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2gx + g \,.\, \Delta x.$$

Der Werth von Δy ist sowohl von x, als auch von Δx abhängig, nimmt mit Δx ab, und wird mit Δx zugleich Null. Auch der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist von x und Δx abhängig, nähert sich aber, wenn Δx sich der Null nähert, der Gränze $2gx$. Diese Gränze ist nur von den besondern Werthen von x abhängig, also eine Function von x.

Ist $y = cx + gx^2$, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = c + 2gx + g \,.\, \Delta x$ und $\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = c + 2gx$ für $\Delta x = 0$.

In diesen beiden Beispielen ist die Gränze des Aenderungsverhältnisses einerlei mit der Geschwindigkeit, welche ein Körper beim freien Falle in x Sekunden erlangt, wenn seine anfängliche Geschwindigkeit Null oder c war.

Für $y = x^3$ ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \,.\, \Delta x + \Delta x^2$ und $3x^2$ die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; und für $y = x^5$ ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5x^4 + 10x^3 \,.\, \Delta x +$ Glieder mit höheren Potenzen von Δx, also $5x^4$ die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Die neuen Functionen von x, nämlich $3x^2$, $5x^4$, erscheinen hier als von den gegebenen x^3, x^5, abgeleitet, und werden deßhalb abgeleitete Functionen genannt.

Das Aenderungsverhältniß jeder Function einer unabhängigen Veränderlichen hat eine Gränze, welche nur abhängig ist von den besondern Werthen der unabhängigen Veränderlichen, und die abgeleitete Function, oder die Ableitung der ursprünglichen Function genannt wird. Man bezeichnet die Ableitung von $f(x)$ gewöhnlich durch $f^1(x)$. Die Ableitungsrechnung, welche auch Differentialrechnung heißt, lehrt die Ableitungen beliebiger Functionen finden.

6. **Fig. 1.** Bedeutet $y = f(x)$ irgend eine krumme Linie in rechtwinkligen Coordinaten, und ist für irgend einen Punkt, **D**, derselben $OA = x$, $AD = y$, für einen andern Punkt, **E**, aber $OB = x + \Delta x$, $BE = y + \Delta y$: so ist $DC = AB = \Delta x$, $CE = \Delta y$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{CE}{DC} = \text{tang}\, EDC = \text{tang}\, DMX$. Es drückt also, wenn eine gegebene Function eine krumme Linie darstellt, das Änderungsverhältniß die Tangente des Winkels aus, welchen eine die Punkte **D** und **E** verbindende gerade Linie mit **OX** bildet. Für einen Punkt **G** auf der andern Seite von **DA** ist Δx negativ zu nehmen. Die Schneidende wird hier **DN**. Wird nun Δx beliebig klein, so rücken die Punkte **M** und **N** einander beliebig nahe, und fallen in einen Punkt **F** zusammen, wenn $\Delta x = 0$ ist. Dann berührt **DF** die krumme Linie in **D**, und $\text{tang}\, DFX = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x)$. Es bedeutet also, wenn die Function eine krumme Linie ausdrückt, die Ableitung die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen eine die Curve berührende gerade Linie mit **OX** bildet.

Die Linie, **AF**, zwischen dem Fußpunkte, **A**, der Ordinate des Berührungspunktes, **D**, und dem Durchschnittspunkte, **F**, der Berührenden mit der Abscissenachse, heißt Subtangente. Weil $AF = AD \cot g\, DFA$, und $\text{tang}\, DFA = f^1(x)$, $AD = f(x)$ ist: so ist die Länge der Subtangente $= f(x) \cdot \frac{1}{f^1 x}$.

Kennt man für einen Punkt der krummen Linie diesen Werth, so ist es leicht durch diesen Punkt eine Berührende an die krumme Linie zu ziehen, z. B. an die Parabel, $y^2 = 2px$, wo die Subtangente stets der doppelten Abscisse des Berührungspunktes gleich ist. Die Linie, **DL**, welche auf der Berührenden, **DF**, im Berührungspunkte, **D**, senkrecht steht, heißt Normale, und die Linie, **AL**, zwischen dem Durchschnittspunkte der Normale mit der Abscissenachse und dem Fußpunkte der Ordinate des Berührungspunktes, heißt Subnormale. Weil $AL = AD\, \text{tang}\, ADL = AD\, \text{tang}\, DFA$ ist: so ist die Länge der Subnormale $= f(x)\, f^1(x)$.

Die Subnormale kann ebenfalls benutzt werden, um die Berührende zu ziehen, z. B. für die Parabel, $y^2 = 2px$, wo die Subnormale beständig dem halben Parameter p gleich ist.

7. Die Ableitungen der Functionen $a \pm x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^a, A^x, $\overset{A}{\text{Log}}\,x$, $\sin x$, $\cos x$, $\text{tang}\, x$, $\cot g\, x$, $\sec x$, $\text{cosec}\, x$ zu finden, wenn **A** eine positive, übrigens beliebige Zahl bedeutet, und $a = \pm A$ ist.

1) Die Ableitung von $a \pm x$ ist ± 1. Denn aus $y = a + x$ folgt $\Delta y = (a + x + \Delta x) - (a + x) = \Delta x$, also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, also auch $f'(x) = 1$. Eben so für $y = a - x$.

2) Die Ableitung von ax ist a. Denn aus $y = ax$ folgt $\Delta y = a(x + \Delta x) - ax = a\Delta x$, und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, also auch $f'(x) = a$.

3) Die Ableitung von $\frac{a}{x}$ ist $-\frac{a}{x^2}$. Denn aus $y = \frac{a}{x}$ folgt $\Delta x = \frac{a}{x + \Delta x} - \frac{a}{x} = \frac{-a\Delta x}{x(x + \Delta x)}$, und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{x(x + \Delta x)}$. Folglich ist $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$.

4) Die Ableitung von x^a ist ax^{a-1}. Denn es ist, wenn a eine positive ganze Zahl bedeutet, $\Delta y = ax^{a-1}\Delta x + \frac{a(a-1)}{1.2}x^{a-2}\Delta x^2 + \ldots$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ax^{a-1} + \frac{a(a-1)}{1.2}x^{a-2}\Delta x + \ldots$, woraus die Behauptung für $\Delta x = 0$ folgt. Ist aber a eine beliebige Zahl, so ist $y + \Delta y = (x + \Delta x)^a = x^a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a$. Nun ist, wenn $z < 1$, für jeden Werth von a

$$(1 + z)^a = 1 + az + \frac{a(a-1)}{1.2}z^2 \ldots.$$

Wie klein aber auch x sein möge, es kann dennoch $\Delta x < x$ genommen werden, folglich ist für beliebige Werthe von a immer $y + \Delta y = x^a\left\{1 + \frac{\Delta x}{x}\right\}^a = x^a + ax^{a-1}\Delta x + \frac{a(a-1)}{1.2}x^{a-2}\Delta x^2 \ldots$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ax^{a-1} + \frac{a(a-1)}{1.2}x^{a-2}\Delta x + \ldots$, woraus die Behauptung für $\Delta x = 0$ folgt. Eben so ist max^{a-1} die Ableitung von mx^a. Die Ableitung von $\sqrt{x}$ ist hiernach $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, weil $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, folglich die Ableitung $= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist.

5) Die Ableitung von A^x ist $A^x \log A$, und die Ableitung von e^x ist e^x. Denn $\Delta y = A^{x+\Delta x} - A^x = A^x(A^{\Delta x} - 1)$. Folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$A^x\left(\frac{A^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$. Sei nun $A^{\Delta x} = 1 + z$, also $A^{\Delta x} - 1 = z$, wo z eine Größe bedeutet, welche Null wird, wenn $\Delta x = 0$ ist. Dann ist $\Delta x = \overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A^x \frac{z}{\overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)}$. Aber nach (4, 3.) ist $\lim. \frac{z}{\overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)} = \log A$ für $z = 0$, folglich $\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x) = A^x \log A$. — Die Ableitung von e^x ist wiederum e^x, weil $\log e = 1$.

6) Die Ableitung von $\overset{A}{\mathrm{Log}}\, x$ ist $\frac{1}{x \log A}$, und die Ableitung von $\log x$ ist $\frac{1}{x}$. Denn aus $y = \overset{A}{\mathrm{Log}}\, x$ folgt $\Delta y = \overset{A}{\mathrm{Log}}(x + \Delta x) - \overset{A}{\mathrm{Log}}\, x = \overset{A}{\mathrm{Log}}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overset{A}{\mathrm{Log}}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$. Sei nun $\frac{\Delta x}{x} = z$, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)}{z}$. So lange x eine angebbare Zahl ist, kann $\frac{\Delta x}{x}$ oder z kleiner werden, als jede beliebig kleine Größe, folglich wird $z = 0$ für $\Delta x = 0$. Nun ist aber (4, 2.) $\lim. \frac{\overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)}{z} = \frac{1}{\log A}$ für $z = 0$. Folglich ist auch $\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log A} = \frac{1}{x \log A}$. Für die natürlichen Logarithmen ist $\log e = 1$, folglich $\frac{1}{x}$ die Ableitung von $\log x$.

7) Die Ableitung von $\sin x$ ist $\cos x$. Denn mit Hülfe der Gleichung $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}(a + b)$ ergiebt sich $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cdot \cos(x + \frac{1}{2} \Delta x)$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x}{2 \cdot \frac{1}{2} \Delta x} \cos(x + \frac{1}{2} \Delta x)$. Nun ist aber $\lim. \frac{\sin z}{z} = 1$ für $z = 0$ (4, 1.). Folglich ist $\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x) = \cos x$.

8) Die Ableitung von $\cos x$ ist $-\sin x$. Denn mit Hülfe der Gleichung $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a - b) \sin \frac{1}{2}(a + b)$ ergiebt sich $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$

$= -2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x \sin(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)$, folglich $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x}{2.\tfrac{1}{2}\Delta x}\sin(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)$, folglich $f^1(x) = -\sin x$.

9) Die Ableitung von $\operatorname{tang} x$ ist $\dfrac{1}{\cos x^2}$. Denn für $y = \operatorname{tang} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ist $\Delta y = \dfrac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\cos x\cos(x+\Delta x)}$ $= \dfrac{\sin\Delta x}{\cos x\cos(x+\Delta x)}$. Folglich ist $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)}$ und $f^1(x) = \dfrac{1}{\cos x^2}$.

10) Die Ableitung von $\operatorname{cotg} x$ ist $-\dfrac{1}{\sin x^2}$. Denn für $y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ist $\Delta y = \dfrac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)} - \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x\cos(x+\Delta x) - \cos x\sin(x+\Delta x)}{\sin x\sin(x+\Delta x)}$ $= -\dfrac{\sin\Delta x}{\sin x\sin(x+\Delta x)}$, und $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{\sin x\sin(x+\Delta x)}$. Folglich ist $f^1(x) = -\dfrac{1}{\sin x^2}$.

11) Die Ableitung von $\sec x$ ist $\dfrac{\sin x}{\cos x^2}$ und 12) die Ableitung von $\operatorname{cosec} x$ ist $-\dfrac{\cos x}{\sin x^2}$.

8. Die Ableitung von $f(x)$ ist eine Function von x, folglich kann von ihr wiederum die Ableitung gebildet werden. Diese Ableitung von $f^1(x)$ heißt zweite Ableitung von $f(x)$, und wird durch $f^2(x)$ bezeichnet. Eben so kann von $f^2(x)$ wiederum die Ableitung gebildet werden, welche dritte Ableitung von $f(x)$ heißt, und durch $f^3(x)$ bezeichnet wird. Dieß geht so lange fort, bis eine von den Ableitungen eine beständige Größe wird, deren Ableitung dann Null ist. Wird keine der Ableitungen eine beständige Größe, so ist ihre Anzahl unbegränzt.

Ist z. B. $f(x) = x^4$, so ist $f^1(x) = 4x^3$, $f^2(x) = 4.3.x^2$, $f^3(x) = 4.3.2.x$, $f^4(x) = 4.3.2.1$, folglich $f^5(x) = 0$, so wie alle folgenden Ableitungen.

Von e^x ist die erste Ableitung e^x, folglich jede der folgenden Ableitungen $= e^x$. Von A^x sind die Ableitungen der Reihe nach $A^x \log A$, $A^x(\log A)^2$, $A^x(\log A)^3 \ldots$ überhaupt $f^n(x) = A^x(\log A)^n$.

Für $f(x)=\sin x$ ist $f^1(x)=\cos x$, $f^2(x)=-\sin x$, $f^3(x)=-\cos x$, $f^4(x)=\sin x$, und die folgenden Ableitungen kehren in derselben Ordnung wieder.

Für $f(x)=\cos x$ ist $f^1(x)=-\sin x$, $f^2(x)=-\cos x$, $f^3(x)=\sin x$, $f^4(x)=\cos x$ u. s. w.

9. Die Ableitung der Summe mehrerer Functionen von x ist die Summe der Ableitungen dieser Functionen. Denn es sei $s=u+v+w\ldots$ Dann ist $\Delta s=\Delta u+\Delta v+\Delta w\ldots$, folglich ist, für jeden beliebigen Werth von Δx,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}\ldots,$$

folglich gilt diese Gleichung auch, wenn $\Delta x=0$ gesetzt, also die Gränze jener Quotienten genommen wird.

10. Wenn $f(0)$, $f^1(0)$, $f^2(0)\ldots f^n(0)$ die Werthe bedeuten, welche $f(x)$, $f^1(x)$, $f^2(x)\ldots f^n(x)$ für $x=0$ annehmen, und von den Werthen $f(0)$, $f^1(0)$, $\frac{f^2(0)}{1.2}$, $\frac{f^3(0)}{1.2.3}\ldots\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n}$ keiner unendlich groß wird, so ist

$$f(x)=f(0)+f^1(0)x+\frac{f^2(0)}{1.2}x^2+\frac{f^3(0)}{1.2.3}x^3\ldots+\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n}x^n\ldots,$$

gültig für solche Werthe von x, für welche die Reihe convergirt! Denn es sei $f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots+Nx^n\ldots$,

so ist
$$\begin{aligned}
f^1(x) &= B+2Cx+3Dx^2\ldots+nNx^{n-1}\ldots,\\
f^2(x) &= 2C+3.2Dx\ldots+n(n-1)Nx^{n-2}\ldots,\\
f^3(x) &= 3.2D\ldots+n(n-1)(n-2)Nx^{n-3}\ldots,\\
&\vdots\\
f^n(x) &= n(n-1)\ldots 2.1N+\ldots
\end{aligned}$$

Setzt man nun $x=0$, so ist $f(0)=A$, $f^1(0)=B$, $f^2(0)=2C$, $f^3(0)=3.2C\ldots$, $f^n(0)=n(n-1)\ldots2.1N$. Daher ist $A=f(0)$, $B=f^1(0)$, $C=\frac{f^2(0)}{1.2}$, $D=\frac{f^3(0)}{1.2.3}\ldots$, $N=\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n}\ldots$ Folglich

$$f(x)=f(0)+f^1(0)x+\frac{f^2(0)}{1.2}x^2+\frac{f^3(0)}{1.2.3}x^3\ldots+\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n}x^n\ldots$$

Diese Reihe heißt die Maclaurinsche, und ist, wie jede Reihe, nur gültig für solche Werthe von x, für welche sie convergirt.

Beispiele. 1) Von e^x sind (8.) alle Ableitungen $=e^x$, aber $e^0=1$, folglich $f^n(0)=1$. Man erhält daher mittelst des Maclaurinschen Satzes die bekannte Reihe

$e^x =$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

welche für jeden beliebigen Werth von x convergirt.

2) Von A^x sind (8.) die Ableitungen der Reihe nach $A^x \log A$, $A^x (\log A)^2 \ldots$ überhaupt $f^n(x) = A^x (\log A)^n$. Folglich ist $f^n(0) = (\log A)^n$, folglich

$$A^x = 1 + x \log A + \frac{(x \log A)^2}{1.2} + \frac{(x \log A)^3}{1.2.3} \ldots + \frac{(x \log A)^n}{1.2\ldots n} \ldots = e^{x \log A}.$$

3) Auf gleiche Weise finden wir (8.) die bekannten Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \ldots \text{ und } \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Das allgemeine Glied der ersten ist $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}$, der zweiten $(-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}$.

11. **Von $y = f(x+h)$ erhält man dieselbe Ableitung, man mag x oder h als unabhängige Veränderliche ansehen, also von $f(x+h)$ die Ableitung nach x oder nach h bilden.**

Denn setzt man $x + \Delta x = x + k$, so ist $\Delta y = f(x+h+k) - f(x+h)$, folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h+k) - f(x+h)}{k}.$$

Wenn aber $h + \Delta h = h + k$ genommen wird, so ist auch

$$\frac{\Delta y}{\Delta h} = \frac{f(x+h+k) - f(x+h)}{k}.$$

Folglich ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta h}$. Dieß gilt für jeden beliebigen Werth von k, also ist auch **die Ableitung von $f(x+h)$ nach x einerlei mit der Ableitung von $f(x+h)$ nach h.**

12. **Für solche Werthe von x, für welche weder $f(x)$, noch einer der Werthe $f^1(x)$, $\frac{f^2(x)}{1.2}$, $\frac{f^3(x)}{1.2.3} \ldots \frac{f^n(x)}{1.2..n}$, unendlich groß wird, ist**

$$f(x+h) = f(x) + f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3} \ldots + f^n(x)\frac{h^n}{1.2..n} \ldots$$

gültig für solche Werthe von h, für welche die Reihe convergirt.

Denn es sei $f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + Fh^5 \ldots$, wo die Coefficienten A, B, C.. nur Functionen von x sind, deren Ableitungen nach x durch $A_1, A_2 \ldots, B_1, B_2 \ldots$ bezeichnet werden sollen. Man erhält alsdann die Ableitung von $f(x+h)$ nach h

$$B + 2Ch + 3Dh^2 + 4Eh^3 + 5Fh^4 \ldots.$$

und nach x $\quad A_1 + B_1h + C_1h^2 + D_1h^3 + E_1h^4 \ldots.$

Ist die Reihe $f(x+h) = A + Bh + Ch^2 \ldots$ auch nur convergent für alle Werthe von h, welche kleiner sind, als eine angebbare Zahl a, so muß (11.) für unzählig viele Werthe von h

$B + 2Ch + 3Dh^2 + 4Eh^3 + 5Fh^4 \ldots = A_1 + B_1h + C_1h^2 + D_1h^3 + E_1h^4 \ldots$

sein, was nur möglich ist, wenn $B = A_1$, $2C = B_1$, $3D = C_1$, $4E = D_1$, $5F = E_1 \ldots$

Hieraus folgt $C = \frac{1}{2}B_1 = \frac{A_2}{1.2}$, $D = \frac{C_1}{3} = \frac{A_3}{1.2.3}$, $E = \frac{D_1}{4} = \frac{A_4}{1.2.3.4}$, $F = \frac{E_1}{5} = \frac{A_5}{1.2..5} \ldots$ Es ist daher $f(x+h) = A + A_1h + A_2\frac{h^2}{1.2} + A_3\frac{h^3}{1.2.3} \ldots$ Da diese Reihe auch gelten muß für $h = 0$, so ist $f(x) = A$, folglich $A_1 = f^1(x)$, $A_2 = f^2(x) \ldots$, folglich

$$f(x+h) = f(x) + f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3} \ldots + f^n(x)\frac{h^n}{1.2..n} \ldots$$

Diese Reihe heißt die Taylorsche und ist für die Mathematik von großer Wichtigkeit. Die Maclaurinsche Reihe folgt aus derselben, wenn $x = 0$ gesetzt, und dann h mit x vertauscht wird.

13. **Die Taylorsche Reihe ist nur gültig, wenn $h < (n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ angenommen wird.**

Denn eine Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n \ldots$ ist **convergent**, wenn der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sich einer bestimmten Gränze $k < 1$ ohne Ende immer mehr nähert, je größer n genommen wird. In der Taylorschen Reihe ist aber

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{f^{n+1}(x)\,h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} : \frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} = \frac{f^{n+1}(x)}{f^n(x)} \cdot \frac{h}{n+1}.$$

Es muß folglich $\frac{f^{n+1}(x)}{f^n(x)} \cdot \frac{h}{n+1} < 1$ oder $h < (n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ genommen werden, damit die Reihe convergent, also als Entwickelung von $f(x+h)$ zulässig sei.

Wenn nun keine der Ableitungen unendlich groß wird, so kann $(n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ größer werden, als jede beliebig große Zahl. Folglich ist h nur der Bedingung unterworfen, kleiner zu sein, als eine unendlich große Zahl, das heißt, die Entwickelung von $f(x+h)$ ist gültig für jeden beliebigen Werth von h.

So ist z. B. für jeden beliebigen Werth von h

$$e^{x+h} = e^x + e^x h + e^x \frac{h^2}{1.2} + e^x \frac{h^3}{1.2.3} = e^x \left(1 + h + \frac{h^2}{1.2} \ldots\right) = e^x . e^h.$$

und $$A^{x+h} = A^x + A^x \log A . h + A^x \frac{(\log A . h)^2}{1.2} \ldots$$

$$= A^x \left\{1 + \frac{h \log A}{1} + \frac{(h \log A)^2}{1.2} \ldots\right\} = A^x A^h.$$

Kann dagegen $f^n(x)$ zwar über jede Gränze hinaus wachsen, wenn n groß genug genommen wird, $\frac{f^n(x)}{1.2..n}$ aber nicht, so nähert sich

$$(n+1) \frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)} = \frac{(n+1) f^n(x)}{1.2 \ldots n(n+1)} : \frac{f^{n+1}(x)}{1.2 \ldots n(n+1)} = \frac{f^n(x)}{1.2..n} : \frac{1.2 \ldots (n+1)}{f^{n+1}(x)}$$

einer Gränze, welche nicht Null sein kann, und welche der angenommene Werth von h nicht erreichen darf. Daher ist die Taylorsche Reihe, wenn nur $\frac{f^n(x)}{1.2..n}$ nicht unendlich groß wird, stets gültig für hinlänglich kleine Werthe von h. Die Werthe von h können aber auch groß sein, nur dürfen sie die Gränze $(n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ nicht überschreiten.

Soll z. B. $\frac{1}{x+h}$ entwickelt werden, so ist $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, folglich (7, 4.)
$f^1(x) = -x^{-2}$, $f^2(x) = 2x^{-3}$, $f^3(x) - 3.2x^{-4}$, $f^4(x) = 4.3.2x^{-5} \ldots$.
$f^n(x) = (-1)^n n(n-1)(n-2) \ldots 3.2x^{-(n+1)}$,
$f^{n+1}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)n(n-1) \ldots 2x^{-(n+2)}$. Folglich ist $\frac{1}{x+h} = f(x+h)$

$$= \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^3} - \frac{h^3}{x^4} \ldots (-1)^n \frac{h^n}{x^{n+1}}.$$ Nun ist hier $(n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$

$$= \frac{f^n(x)}{1.2..n} : \frac{f^{(n+1)}x}{1.2..(n+1)} = (-1)^n x^{-(n+1)} : (-1)^{n+1} x^{-(n+2)}$$

$= -x$. Folglich muß, damit diese Entwickelung gültig sei, $h < x$ sein, was immer möglich ist, es müßte denn $x = 0$ genommen werden, durch welche Annahme aber nicht bloß $f^n(x)$, sondern auch $\frac{f^n(x)}{1.2..n}$ unendlich groß werden würde, was im Obigen ausgeschlossen ist.

14. **In der Taylorschen Reihe kann man für h stets solche Werthe annehmen, daß jedes Glied größer wird, als die Summe aller folgenden Glieder.**

Denn in der geometrischen Progression $a + ax + ax^2 + ax^3 \ldots$ wird bekanntlich jedes Glied größer, als die Summe aller folgenden Glieder, wenn $x < \frac{1}{2}$ genommen wird. Denkt man sich nun unter $a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \ldots$ die Taylorsche Reihe, und bezeichnet man den **größten** der Quotienten $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2} \ldots \frac{a_{n+1}}{a_n}$ durch q: so ist a_1 nicht größer, als $a_0 q$, a_2 nicht größer, als $a_0 q^2$, a_3 nicht größer, als $a_0 q^3 \ldots$, folglich ist auch in der Taylorschen Reihe $a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 \ldots$ kein Glied größer, als das entsprechende der Reihe $a_0 + a_0 qh + a_0 (qh)^2 + a_0 (qh)^3 \ldots$, also ist auch die Summe aller Glieder, welche auf ein beliebiges Glied der ersten Reihe folgen, nicht größer, als die entsprechende Folge von Gliedern in der andern Reihe. Nun ist aber in der Reihe $a_0 + a_0(qh) + a_0(qh)^2 \ldots$ das erste Glied a_0 größer, als die Summe der folgenden, wenn $qh < \frac{1}{2}$, d. i. $h < \frac{1}{2q}$ genommen wird; folglich ist noch mehr a_0 größer, als die Summe der übrigen Glieder der Taylorschen Reihe. Auch ist für diesen Werth von h das Glied $a_m h^m$ größer, als die Summe der folgenden Glieder. Denn $a_0 + a_1 h \ldots + a_m h^m + a_{m+1} h^{m+1} \ldots = a_0 + a_1 h \ldots + h^m \{a_m + a_{m+1} h \ldots\}$. Da nun q der größte der Quotienten $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1} \ldots \frac{a_{n+1}}{a_n}$: so ist $a_m > a_{m+1} h + \ldots$, folglich auch $a_m h^m > a_{m+1} h^{m+1} \ldots$, wenn $h < \frac{1}{2q}$. Es muß also $h < \frac{1}{2} (n+1) \frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ sein. Damit die Reihe convergent sei, mußte $h < (n+1) \frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ sein. Da nun die letztere Annahme stets möglich ist (13), es müßte denn $\frac{f^n(x)}{1.2\ldots n} = \infty$ werden: so kann auch für h stets ein solcher Werth angenommen werden, daß jedes Glied größer wird, als die Summe aller folgenden Glieder.

15. **In der Taylorschen Reihe kann man für h stets solche Werthe annehmen, daß die Summe aller Glieder, welche auf das erste, oder irgend ein späteres Glied folgen, kleiner wird, als jede beliebig kleine Größe.**

Denn es können für h solche Werthe angenommen werden, daß

$$\frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} > \frac{f^{n+1}(x)h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{f^{n+2}(x)h^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} \ldots \quad (14.).$$

Folglich auch $2\frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} > \frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} + \frac{f^{n+1}(x)h^{n+1}}{1.2\ldots n+1} + \frac{f^{n+2}(x)h^{n+2}}{1.2\ldots n+2} \ldots$

Da aber $\frac{f^n(x)}{1.2\ldots n}$ nicht größer ist, als jede beliebig große Zahl (12.), so kann h so klein angenommen werden, daß $2\frac{f^n(x)}{1.2\ldots n}h^n$ kleiner wird, als jede beliebig kleine Größe. Folglich noch vielmehr $\frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} + \frac{f^{n+1}(x)h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \ldots$ kleiner, als jede beliebig kleine Größe.

16. Nach dem Taylorschen Satze (12.) ist $f(x+\Delta x) = f(x) + f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{(\Delta x)^2}{1.2} \ldots$, folglich $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{(\Delta x)^2}{1.2} \ldots$ Das erste Glied dieser Differenz der beiden Werthe $y+\Delta y$ und y heißt Differential von y, und wird durch dy bezeichnet, so daß $dy = f^1(x).\Delta x$ ist. Die ganz beliebige Größe Δx bezeichnet man in gleicher Weise durch dx, und nennt sie Differential von x, so daß $\quad dy = f^1(x).dx$ und $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$.

Wenn x die unabhängige Veränderliche ist, so ist dx eine beständige, übrigens willkürliche Größe. Der Werth von dy ist veränderlich mit $f^1(x)$. Weil $dy = f^1(x).dx$, so wird die Ableitung auch häufig Differentialcoefficient genannt, und weil $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$, so heißt $f^1(x)$ gewöhnlich Differentialquotient. Daher auch die Benennung Differentialrechnung für den Inbegriff der Methoden, die Ableitungen oder Differentialquotienten beliebiger Functionen zu bilden. Durch $\frac{dy}{dx}$ soll im Folgenden stets die Ableitung von y nach x bezeichnet werden. Eben so soll $\frac{dx}{dy}$ die Ableitung von x nach y, $\frac{dz}{dy}$ die Ableitung von z nach y bedeuten, ohne daß man dabei an besondere Werthe von dx, dy, dz zu denken hat. Denn das Zeichen $\frac{dy}{dx}$ könnte man auch mit irgend einem andern ausdrucksvollen Zeichen, etwa $d_x y$ oder dy_x, vertauschen.

17. Ist z eine Function von y, und y eine Function von x: so findet man die Ableitung von z nach x dem Producte der Ableitungen von z nach y und von y nach x gleich.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Denn nach dem Taylorschen Satze (12.) ist $\Delta z = F^1(y)\,\Delta y + F^2(y)\,\frac{\Delta y^2}{1.2} \ldots$, und $\Delta y = f^1(x)\,\Delta x + f^2(x)\,\frac{\Delta x^2}{1.2} \ldots$, wenn $z = F(y)$ und $y = f(x)$ ist. Wird nun der Werth von Δy in den Ausdruck für Δz gesetzt: so erhält man

$$\Delta z = F^1(y)\left\{f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{\Delta x^2}{1.2}\ldots\right\} + \tfrac{1}{2}F^2(y)\left\{f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{\Delta x^2}{2}\ldots\right\}^2 + \ldots$$

Wird dieser Ausdruck nach Potenzen von Δx geordnet, so kommt

$$\Delta z = F^1(y)\,f^1(x)\,\Delta x + A\,\Delta x^2 + B\,\Delta x^3 \ldots,$$

folglich $$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F^1y \,.\, f^1x \quad + A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 \ldots$$

Die Gränze dieses Ausdrucks, oder die Ableitung von z nach x, ist

$$F^1y \,.\, f^1(x).$$

Aber $F^1(y)$ ist die Ableitung von z oder $F(y)$, als wäre y die unabhängige Veränderliche, oder $F^1(y) = \frac{dz}{dy}$, und $f^1(x) = \frac{dy}{dx}$; folglich $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Wird endlich y aus $\frac{dz}{dy}$ mittelst der Gleichung $y = f(x)$ weggeschafft, so erhält man $\frac{dz}{dx}$ als Function von x.

Beispiele. 1) $z = \log(x^2)$. Man setze $y = x^2$, also $z = \log y$. Dann ist $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$ und $\frac{dy}{dx} = 2x$. Folglich $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot 2x = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} = \frac{dz}{dx}$.

2) $z = \log\sin x$. Man setze $y = \sin x$, also $z = \log y$. Dann ist $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$ und $\frac{dy}{dx} = \cos x$. Folglich $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x$.

3) $z = \log\cos x$, also $z = \log y$, $y = \cos x$. Folglich $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, und $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y} \cdot \sin x = -\operatorname{tang} x$.

4) $z = \log \operatorname{tang} x$, also $z = \log y$, $y = \operatorname{tang} x$. Folglich $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}$. Folglich $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\cos x^2} = \frac{\cos x}{\sin x \cos x^2} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$.

5) $z = \log \operatorname{cotg} x$, also $z = \log y$, $y = \operatorname{cotg} x$. Folglich $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin x^2}$, und $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y \sin x^2} = -\frac{\sin x}{\cos x \sin x^2} = -\frac{2}{\sin 2x}$.

6) $z = e^{e^x}$. Man setze $e^x = y$, also $z = e^y$. Dann ist $\frac{dz}{dy} = e^y$ und $\frac{dy}{dx} = e^x$, folglich $\frac{dz}{dx} = e^y . e^x = e^{e^x} . e^x$.

18. Um mittelst der Differentiale die Ableitung von z nach x zu finden, wenn $z = F(y)$ und $y = f(x)$ ist, bilde man das Differential von z, als wäre y die unabhängige Veränderliche, und setze anstatt dy seinen Werth $\frac{dy}{dx} dx$.

Denn wenn $z = F(y)$ und $y = f(x)$ ist: so ist (17.) $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Folglich ist (16.) $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} dx$ das Differential von z. Aber eben so ist (16.) $\frac{dy}{dx} dx$ das Differential von y. Man hat also

$$dz = \frac{dz}{dy} dy \text{ und } dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

woraus sich ohne Weiteres der Werth von $\frac{dz}{dx}$ ergiebt.

Beispiele. 1) $z = \sec x = \frac{1}{\cos x}$. Man setze $y = \cos x$, so hat man $z = \frac{1}{y}$. Aber $dz = -\frac{dy}{y^2}$ und $dy = -\sin x dx$, folglich $dz = \frac{\sin x}{y^2} dx = \frac{\sin x}{\cos x^2} dx$. Folglich ist $\frac{dz}{dx}$ oder die Ableitung von $\sec x = \frac{\sin x}{\cos x^2}$.

2) $z = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{y}$, wo $y = \sin x$. Folglich $dz = -\frac{dy}{y^2}$ und $dy = \cos x$, also $dz = -\frac{\cos x}{y^2} dx = -\frac{\cos x}{\sin x^2} dx$. Folglich ist die Ableitung von $\operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin x^2}$.

3) $z = \log \sec x = \log \frac{1}{\cos x}$. Man setze $\cos x = y$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{y} = u$, so ist $z = \log u$. Folglich $dz = \frac{du}{u}$, $du = -\frac{dy}{y^2}$, also zunächst $dz = -\frac{1}{u} \cdot \frac{dy}{y^2}$. Ferner $dy = -\sin x . dx$. Folglich $dz = -\frac{1}{u} . -\frac{\sin x dx}{y^2} = \frac{\sin x dx}{y} = \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Folglich ist die Ableitung von $\log \sec x = \tang x$.

4) Eben so findet man die Ableitung von $\log \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x$.

5) $z = A^{B^x}$. Man setze $B^x = y$, also $z = A^y$. Dann ist $dz = A^y \log A . dy$ und $dy = B^x \log B . dx$. Folglich $dz = A^y \log A . B^x \log B . dx = A^{B^x} \log A \log B . dx$.

19. Die Ableitungen, welche früher (7.) gefunden sind, können mittelst der neuen Bezeichnungsweise übersichtlich zusammengestellt werden.

$$d(a + x) = dx, \quad d(a - x) = -dx, \quad d(ax) = adx, \quad d\left(\frac{a}{x}\right) = -a\frac{dx}{x^2};$$

$$dx^a = ax^{a-1} . dx;$$

$$dA^x = A^x \log A . dx, \quad de^x = e^x dx;$$

$$d \overset{A}{\mathrm{Log}} x = \frac{dx}{x \log A}, \quad d \log x = \frac{dx}{x};$$

$$d \sin x = \cos x . dx, \quad d \cos x = -\sin x . dx;$$

$$d \tang x = \frac{dx}{\cos x^2}, \quad d \operatorname{cotg} x = \frac{-dx}{\sin x^2}, \quad d \sec x = \frac{\sin x . dx}{\cos x^2}, \quad d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x . dx}{\sin x^2}.$$

Hierin kann x entweder unabhängige Veränderliche, oder von einer andern Veränderlichen abhängig sein.

20. Es ergeben sich aus dem Vorigen (19.) folgende Sätze:

1) Wird eine beständige Größe zu einer Function addirt, so wird dadurch weder das Differential noch die Ableitung geändert. Denn $d(a + f(x)) = d(a + y) = dy = df(x) = f'(x) dx$.

2) Wird eine Function mit einer beständigen Größe multiplicirt, so erhält man das Differential, wenn man die beständige Größe mit dem Differential der Function multiplicirt. Denn $d(af(x)) = d(ay) = ady = adf(x) = af'(x) dx$.

21. Kennt man die Ableitung von y nach x, so findet man die Ableitung von x nach y, wenn man 1 durch die erstere dividirt.

$\frac{dx}{dy}$

Denn wenn $y = f(x)$ ist, so ist $x = F(y)$, folglich (12.) $\Delta y = f^1(x)\,\Delta x + f^2(x)\,\frac{\Delta x^2}{1.2}$ und $\Delta x = F^1(y)\,\Delta y + F^2 y\,\frac{\Delta y^2}{1.2}\dots$ Folglich wird Δx mit Δy zugleich Null. Nun ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x) + f^2(x)\,\frac{\Delta x}{1.2}\dots$, folglich $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f^1(x) + \frac{1}{2} f^2(x)\,\Delta x}\dots = \frac{1}{f^1(x)} - \frac{1}{2}\,\frac{f^2(x)}{f^1(x)^2}\,\Delta x\dots$ Wird nun $\Delta y = 0$, so wird auch $\Delta x = 0$, und $\frac{1}{f^1(x)}$ ist die Gränze des Aenderungsverhältnisses $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Folglich ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Es sei nun $y = \arcsin x$, oder $x = \sin y$. Dann ist $\frac{dx}{dy} = \cos y$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$. Aber $x = \sin y$, also $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Eben so folgert man

$$y = \arccos x,\quad x = \cos y,\quad \frac{dx}{dy} = -\sin y,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$y = \operatorname{arctang} x,\quad x = \operatorname{tang} y,\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos y^2},\quad \frac{dy}{dx} = \cos y^2 = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$y = \operatorname{arccotg} x,\quad x = \operatorname{cotg} y,\quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin y^2},\quad \frac{dy}{dx} = -\sin y^2 = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Hieraus erhält man die Differentialformeln, welche auch gelten, wenn x nicht unabhängige Veränderliche, sondern Function einer andern unabhängigen Veränderlichen ist:

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},\quad d \operatorname{arctang} x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

$$d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},\quad d \operatorname{arccotg} x = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

22. 1) **Die Ableitung des Productes zweier Functionen von x ist die Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede Function mit der Ableitung der andern multiplicirt.**

$$\frac{duv}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}.$$

Denn es sei $z = uv = F(x)\,f(x)$. Dann ist $z + \Delta z = F(x + \Delta x) \times f(x + \Delta x)$
$$= \left\{F(x) + F^1(x)\Delta x + F^2(x)\frac{\Delta x^2}{1.2}\ldots\right\}\left\{f(x) + f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{\Delta x^2}{1.2}\ldots\right\}$$
$$= F(x)\,f(x) + \left\{F(x)\,f^1(x) + f(x)\,F^1(x)\right\}\Delta x + A\,\Delta x^2 + B\,\Delta x^3\ldots$$
Folglich ist $\frac{\Delta z}{\Delta x} = F(x)\,f^1(x) + f(x)\,F^1(x) + A\,\Delta x + B\,\Delta x^2\ldots$

Die Gränze dieses Ausdrucks, oder die Ableitung von z nach x, ist $F(x)\,f^1(x) + f(x)\,F^1(x) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = \frac{d.uv}{dx}$.

2) Die Ableitung des Productes dreier Functionen von x erhält man, wenn man die Ableitung einer jeden Function mit dem Producte der beiden andern Functionen multiplicirt, und die Summe der erhaltenen Producte bildet.
$$\frac{d.tuv}{dx} = uv\frac{dt}{dx} + tv\frac{du}{dx} + tu\frac{dv}{dx}.$$
Denn wenn $z = tuv$ ist, so setze man $uv = w$, also $z = tw$, folglich $\frac{dz}{dx} = w\frac{dt}{dx} + t\frac{dw}{dx}$. Aber $\frac{dw}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$, weil $w = uv$ ist. Folglich ist $\frac{dz}{dx} = \frac{d.tuv}{dx} = uv\frac{dt}{dx} + tv\frac{du}{dx} + tu\frac{dv}{dx}$.

3) Die Ableitung des Productes beliebig vieler Functionen von x erhält man, wenn man die Ableitung jeder einzelnen mit dem Producte aller übrigen Functionen multiplicirt, und die Summe der erhaltenen Producte bildet.

Denn wenn der Satz gilt für ein Product von n Functionen, so folgt wie in (2), daß er auch gelten müsse für ein Product von $(n + 1)$ Functionen von x. Nun gilt er aber für 3, folglich auch für 4, folglich auch für 5, und so fort für jede beliebige Anzahl Functionen von x.

Beisp. 1) $\frac{d\sin x\cos x}{dx} = \cos x\frac{d\sin x}{dx} + \sin x\frac{d\cos x}{dx} = \cos x^2 - \sin x^2 = \cos 2x.$

2) $\frac{d(x\log x)}{dx} = 1 + \log x.$ 3) $\frac{d.x^x}{dx} = \frac{de^{x\log x}}{dx} = e^{x\log x}(1 + \log x).$

4) $\frac{d(x\log(x\sin x))}{dx} = \log(x\sin x) + \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x}.$

23. Die Ableitung eines Bruches, dessen Zähler und Nenner Functionen von x sind, erhält man, wenn man den Nenner mit der Ableitung des Zählers, und den Zähler mit der Ableitung des Nenners multiplicirt, vom ersten Producte das zweite abzieht, und den Unterschied durch das Quadrat des Nenners dividirt.

$$\frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Denn es sei $z = \frac{u}{v}$, so ist $zv = u$, folglich (22.)

$$v\frac{dz}{dx} + z\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx}, \text{ oder } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx},$$

woraus $\frac{dz}{dv} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ folgt.

Die Richtigkeit des Satzes könnte auch dargethan werden, wenn $z = \frac{F(x)}{f(x)}$ gesetzt, und $\Delta z = \frac{F(x + \Delta x)}{f(x + \Delta x)} - \frac{F(x)}{f(x)}$ nach dem Taylorschen Satze (12.) entwickelt würde. Man fände $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x)F^1(x) - F(x)f^1(x) + A\Delta x + B\Delta x^2 \ldots}{(f(x))^2 + f(x)f^1(x)\Delta x \ldots}$, folglich $\frac{dz}{dx} = \frac{f(x)F^1(x) - F(x)f^1(x)}{(f(x))^2}$.

Beispiele. 1) $\frac{d\,\text{tang}\,x}{dx} = \frac{d\frac{\sin x}{\cos x}}{dx} = \frac{\cos x\frac{d\sin x}{dx} - \sin x\frac{d\cos x}{dx}}{\cos x^2}$

$= \frac{\cos x^2 + \sin x^2}{\cos x^2} = \frac{1}{\cos x^2}$, wie bekannt (7.). 2) Für $y = \frac{\log x}{x}$ ist $\frac{dy}{dx}$ $= \frac{1 - \log x}{x^2}$. 3) Für $y = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$. 4) Für $y = \log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

24. Die Eigenschaften der Ableitungen (9. 22. 23.) geben nachfolgende Sätze für die Differentiale:

1) Das Differential der Summe mehrerer Functionen von x ist die Summe der Differentiale der einzelnen Functionen.

2) Das Differential des Productes mehrerer Functionen von x ist die Summe aus den Producten, welche man durch Multiplication des Differentials jeder Function mit dem Producte aller übrigen Functionen erhält.

3) Das Differential eines Bruches findet man, wenn man den Nenner mit dem Differential des Zählers, und den Zähler mit dem Differential des Nenners multiplicirt, vom ersten Producte das zweite abzieht, und den Unterschied durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Diese Sätze gelten, auch wenn x nicht unabhängige Veränderliche, sondern selbst eine Function einer andern Veränderlichen ist.

25. Man ist nun im Stande, von jeder beliebigen Function von einer unabhängigen Veränderlichen die Ableitung zu bilden, und zugleich die Aenderung der abhängigen Veränderlichen in eine Reihe zu entwickeln (12.), welche nach den Potenzen der Aenderung der unabhängigen Veränderlichen fortschreitet. Wenn nämlich $y = f(x)$ ist, so ist $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f^1(x)\,\Delta x + f^2(x)\frac{\Delta x^2}{1.2} + f^3(x)\frac{\Delta x^3}{1.2.3}\dots$ Wie man $f^1(x)$ durch $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, so $f^2(x)$ durch $\frac{d^2y}{dx^2}$, $f^3(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. f. Hiernach nimmt die Taylorsche Reihe, wenn zugleich $y + \Delta y$ durch y' bezeichnet wird, folgende Gestalt an

$$y + \Delta y = y' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}\dots$$

26. Wenn u eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen ist,

$$u = f(x, y),$$

und x sich in $x + h$, y in $y + k$, verwandelt: so soll die hieraus hervorgehende Veränderung der abhängigen Veränderlichen u, oder

$$\Delta u = f(x + h,\ y + k) - f(x,\ y)$$

bestimmt werden.

Setzt man zunächst $x + h$ statt x, ohne y zu verändern, so wird (12. u. 25.) $$f(x + h,\ y) = u + \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}\dots$$

In dieser Entwickelung bedeuten $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\dots$ die Ableitungen von u nach x, indem x als einzige veränderliche, y dagegen als beständige Größe betrachtet wird. Solche Ableitungen heißen partielle Ableitungen, und sollen, wo es die Deutlichkeit fordert, durch $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, bezeichnet werden.

Diese Ableitungen können aber y noch enthalten. Wenn daher y in $y+k$ übergeht, so muß jedes einzelne Glied der Entwickelung von $f(x+h, y)$ nach dem Taylorschen Satze, mittelst der partiellen Ableitungen nach y, in eine Reihe nach Potenzen von k entwickelt werden. Es geht nämlich

$$u \text{ über in } u + \frac{du}{dy}k + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}\ldots,$$

$$\text{und } \frac{du}{dx} \quad \text{in} \quad \frac{du}{dx} + \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}k + \frac{d^2\frac{du}{dx}}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}\ldots,$$

$$\text{so wie } \frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{in} \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d\frac{d^2u}{dx^2}}{dy}k + \frac{d^2\frac{d^2u}{dx^2}}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}\ldots$$

Man bezeichnet nun $\dfrac{d\frac{du}{dx}}{dy}$ durch $\dfrac{d^2u}{dxdy}$, und $\dfrac{d\frac{d^2u}{dx^2}}{dy}$ durch $\dfrac{d^3u}{dx^2dy}$, überhaupt $\dfrac{d^n\frac{d^mu}{dx^m}}{dy^n}$ durch $\dfrac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n}$, indem $\dfrac{d^2u}{dxdy}$ bedeutet, es solle von der partiellen Ableitung von u nach x die partielle Ableitung von u nach y gebildet werden, und $\dfrac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n}$ die Bildung der nten partiellen Ableitung nach y von $\dfrac{d^mu}{dx^n}$ fordert.

Hiernach geht $f(x+h, y) = u + \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$

über in

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = {} & u \\ & + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dx}h \\ & + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} \\ & + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{hk^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2k}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}\ldots \\ & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Nimmt man dagegen zuerst y und dann x als veränderlich, so geht

$$f(x, y+k) = u + \frac{du}{dy} k + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} \dots$$

über in

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = {} & u \\ & + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k \\ & + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dydx} kh + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} \\ & + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^3u}{dydx^2} \frac{kh^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^2dx} \frac{k^2h}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} \dots \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Hieraus folgt, weil beide Entwickelungen gleich sein müssen für beliebige Werthe von h nnd k,

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}, \quad \frac{d^3u}{dx^2dy} = \frac{d^3u}{dydx^2}, \quad \frac{d^3u}{dy^2dx} = \frac{d^3u}{dxdy^2} \dots$$

Es ist also gleichgültig, in welcher Ordnung man die partiellen Ableitungen nach x und nach y bildet.

Wenn also $u = f(x, y)$, so ist

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy} hk + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} \dots,$$

folglich $f(x+h, y+k) - f(x, y) = \Delta u$

$$= \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy} hk + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} \dots$$

Als Beispiel kann $u = y^3 - 3axy + x^3$ dienen.

27. Obgleich h und k völlig unabhängig von einander sind, kann man doch $k = ph$ setzen, wenn man nur unter p eine ganz willkürliche Zahl, oder auch eine beliebige Function von x versteht. Man erhält alsdann

$$f(x+h, y+k) = u + \left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy}\right) h + \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdy} + p^2\frac{d^2u}{dy^2}\right) \frac{h^2}{1.2} \dots,$$

$$\text{folglich } \Delta u = \left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy}\right) h + \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdy} + p^2\frac{d^2u}{dy^2}\right) \frac{h^2}{1.2} \dots,$$

Diese Reihe ist nur für solche Werthe von h und ph gültig, für welche sie convergirt. Man kann die Reihe andeuten durch $\Delta y = A_1 h + \frac{A_2 h^2}{1.2} + \frac{A_3 h^3}{1.2.3} \dots + \frac{A_n h^n}{1.2..n} \dots$

Sobald nun p keine unendlich große Zahl bedeutet, und solche Werthe von x und y ausgeschlossen werden, für welche eine der partiellen Ableitungen unendlich groß wird, so convergirt die Reihe, wenn $h < (n+1)\frac{A_n}{A_{n+1}}$ angenommen wird.

Daher ist diese Reihe stets gültig für hinlänglich kleine Werthe von h.

Ferner können für h stets solche Werthe angenommen werden, daß jedes Glied größer wird, als die Summe aller folgenden Glieder. Denn es folgt eben so wie in (14.), daß, wenn $\frac{A_{n+1}}{(n+1)A_n}$ den größten der Quotienten $\frac{A_2}{1.2} : A_1$, $\frac{A_3}{1.2.3} : \frac{A_2}{1.2} \ldots$ bedeutet, man h nur kleiner setzen darf, als $\frac{1}{2}(n+1)\frac{A_n}{A_{n+1}}$, um jedes Glied größer zu machen, als die Summe aller folgenden Glieder.

Auch kann man für h stets solche Werthe annehmen, daß in der Entwickelung von Δy die Summe aller Glieder, oder auch die Summe aller Glieder, welche auf ein beliebiges Glied folgen, kleiner wird, als jede beliebig kleine Größe. Der Satz folgt ähnlich, wie (15.).

28. Bezeichnet man in der Entwickelung von Δu (27.) h durch Δx und $ph = k$ durch Δy, so ist

$$\Delta u = \left(\frac{du}{dx} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{du}{dy}\right) \Delta x + A \Delta x^2 + B \Delta x^3 \ldots,$$

folglich $$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{du}{dy} + A \cdot \Delta x + B \Delta x^2 \ldots$$

Eben so findet man $$\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{du}{dy} + \frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{du}{dx} + A' \Delta y + B' \Delta y^2 \ldots$$

Beide Ausdrücke nähern sich, wenn Δy und Δx sich zugleich der Null nähern, gewissen Gränzen, nämlich $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ nähert sich der Gränze $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$, und $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ nähert sich der Gränze $\frac{du}{dy} + \frac{du}{dx} \cdot \lim. \frac{\Delta x}{\Delta y}$. So lange y und x völlig unabhängig sind, ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eine ganz willkürliche Größe. Man kann sich daher denken, daß y irgend eine, aber ganz willkürliche Function von x sei. Dann ist das Aenderungsverhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der beiden unabhängigen Veränderlichen ein ganz beliebiges, folglich auch die Gränze desselben, oder $\frac{dy}{dx}$ eine ganz beliebige Zahl p, folglich auch die Gränze von $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, oder $\frac{dx}{dy}$ eine ganz beliebige Zahl $\frac{1}{p}$.

Daher ist die Gränze von $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} + p\,\frac{du}{dy}$, 1.

und die Gränze von $\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{du}{dy} + \frac{dx}{dy} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} + \frac{1}{p}\,\frac{du}{dx}$. 2.

Man nennt den ersten Theil der Differenz Δu der beiden Werthe $u + \Delta u$ und u, nämlich $\left(\frac{du}{dx} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{du}{dy}\right) \Delta x = \frac{du}{dx}\,\Delta x + \frac{du}{dy}\,\Delta y$, auch Differential von u, und bezeichnet dasselbe durch du. Folglich ist, wenn man in gleicher Weise die willkürlichen Größen Δx, Δy, durch dx, dy, bezeichnet,

$$3.\quad du = \left(\frac{du}{dy}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy,$$

indem $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, die partiellen Ableitungen von u nach x und nach y bedeuten.

29. In der Entwickelung von $f(x + h, y + k)$ (27.) ist p nicht mehr willkürlich, wenn nicht jeder Werth von $u = f(x, y)$ zulässig, sondern

$$f(x, y) = 0$$

sein soll. Denn alsdann ist, wenn man h durch Δx und p durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bezeichnet (28.),

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \left(\frac{du}{dx} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{du}{dy}\right) \Delta x + A\,\Delta x^2 \ldots$$

gleich Null für jeden beliebigen Werth von Δx, weil für x und y nur solche Werthe zulässig sind, für welche $u = 0$ ist. Es müssen daher die Coefficienten der einzelnen Potenzen von Δx für sich Null sein, folglich

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

wo $\left(\frac{du}{dx}\right)$ die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x, und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach y bedeutet. Das Aenderungsverhältniß ist nicht mehr willkürlich, eben so wenig die Gränze desselben. Da nun die Gleichung $\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ für jeden Werth von Δx gelten muß: so gilt sie auch, wenn Δx

sich der Null nähert, für die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Folglich ist

$$1)\ \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,\ \text{oder}\ 2)\ \frac{dy}{dx} = -\left\{\left(\frac{du}{dx}\right) : \left(\frac{du}{dy}\right)\right\}.$$

Wenn also in einer Gleichung, $f(x, y) = 0$, y unentwickelte Function von x ist, so findet man die Ableitung von y nach x nach der Regel:

Man bilde die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ nach x, und von $f(x, y)$ nach y, als wenn x und y unabhängige Veränderliche wären, und dividire die erstere Ableitung durch die zweite: so ist der Quotient, mit umgekehrtem Vorzeichen genommen, die Ableitung von y nach x.

Z. B. für $(y - b)^2 + (x - a)^2 - r^2 = 0$ findet man $\frac{dy}{dx} = -\frac{x - a}{y - b}$, weil $\left(\frac{du}{dx}\right) = 2(x - a)$, und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 2(y - b)$ ist.

30. Um die Ableitung von x nach y zu finden, hat man, wenn $u = f(x, y) = 0$ ist,

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \left(\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\Delta x}{\Delta y}\left(\frac{du}{dx}\right)\right)\Delta y + A\Delta y^2 \ldots$$

Da dieser Ausdruck Null sein muß für jeden beliebigen Werth von Δy, so findet man, wie (29.),

$$1)\ \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dx}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = 0,\ \text{oder}\ 2)\ \frac{dx}{dy} = -\left\{\left(\frac{du}{dy}\right) : \left(\frac{du}{dx}\right)\right\}.$$

Folglich ist (29, 2.)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},\ \text{und}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Die beiden Gleichungen $\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$, und $\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dx}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, können durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy = 0$$

dargestellt werden.

31. Die Ableitung von y nach x erscheint hier als eine Function von x und y. Bezeichnet man $\frac{dy}{dx}$ durch z, so erhielte man, wenn x und y völlig unabhängig wären,

$\dfrac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \left(\dfrac{dz}{dx}\right) + \dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{dz}{dy}\right)$ (28, 1.), wo $\dfrac{dy}{dx}$ die Ableitung einer willkürlichen Function y nach x bedeutet. Hier aber ist y nicht willkürliche Function von x, sondern durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ von x abhängig. Folglich ist $\dfrac{dy}{dx}$ die aus dieser Gleichung gefundene Ableitung von y nach x (29, 1. u. 2.). Folglich ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

wo $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)$, $\left(\dfrac{dz}{dy}\right)$ die partiellen Ableitungen der ersten Ableitung sind. Wäre die erste Ableitung nur Function von x, so erhielte man $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dz}{dx}\right)$, weil $\left(\dfrac{dz}{dy}\right) = 0$ wäre. Dagegen erhielte man $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dz}{dy}\right)\dfrac{dy}{dx}$, wenn $\dfrac{dy}{dx} = z$ nur Function von y wäre.

Ist z. B. $y^2 - 2axy + x^2 - b = 0$, so ist $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay - x}{y - ax} = z$; $\left(\dfrac{dz}{dx}\right) = \dfrac{y(a^2-1)}{(y-ax)^2}$, $\left(\dfrac{dz}{dy}\right) = \dfrac{x(1-a^2)}{(y-ax)^2}$; folglich $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{y(a^2-1)}{(y-ax)^2} + \dfrac{x(1-a^2)}{(y-ax)^2} \cdot \dfrac{ay-x}{y-ax}$.

Ist ferner $x^2 + ax - by = 0$, so findet man $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+a}{b}$, und $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2}{b}$.
Ist aber $y^2 + ay - bx = 0$, so findet man $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{2y+a}$, und $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2b}{(2y+a)^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2b^2}{(2y+a)^3}$.

32. Durch ähnliche Entwickelungen (26.) findet man, wenn $u = f(x, y, z)$ ist,

$$u + \Delta u = u + \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l\right) + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dxdz}hl + \frac{d^2u}{dydz}kl + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{l^2}{1.2}\right) + \ldots$$

also (28.) $du = \left(\dfrac{du}{dx}\right)dx + \left(\dfrac{du}{dy}\right)dy + \left(\dfrac{du}{dz}\right)dz$, was Null zu setzen ist, wenn $u = 0$ eine Gleichung zwischen x, y, z, bedeutet (30.).