7. Sekundärliteratur

Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen der Realschule I. Ordnung im Waisenhause zu Halle am ... in dem Versammlungssaale des neuen ...

Halle (Saale), 1838

1. Die Auflösung der Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Anwendungen.

1. Die Auflösung der Gleichungen.

33. Wenn $f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots = 0$, m gleiche Wurzeln, jede $= a$, hat, so ist $f(x) = (x - a)^m Fx$, wo $F(x)$ den Factor $x - a$ nicht enthält. Folglich ist

$$f^1(x) = (x-a)^{m-1}\left\{(x-a)F^1(x) + mF(x)\right\}.$$

Wenn in dem Ausdrucke $f(x)$ also m gleiche Factoren sind, so kommen in der Ableitung noch $m - 1$ derselben vor.

Wenn daher $f(x)$ und $f^1(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so hat $f(x) = 0$ nur von einander verschiedene Wurzeln. Wenn dagegen $f(x)$ und $f^1(x)$ den gemeinschaftlichen Theiler $x - a$ haben, so hat $f(x)$ den Factor $(x - a)^2$, folglich hat $f(x) = 0$ zwei gleiche Wurzeln, jede $= a$. Und wenn $f(x)$ und $f^1(x)$ den gemeinschaftlichen Theiler $(x - a)^m$ haben, so hat $f(x)$ den Theiler $(x - a)^{m+1}$, folglich hat die Gleichung $m + 1$ gleiche Wurzeln, jede $= a$.

Man suche daher den größten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ von $f(x)$ und $f^1(x)$. Jede einfache Wurzel von $\varphi(x) = 0$ ist eine zweifache von $f(x) = 0$; jede zweifache Wurzel von $\varphi(x) = 0$ ist eine dreifache von $f(x) = 0$ u. s. w.

Die gleichen Wurzeln von $\varphi(x) = 0$ erforscht man, indem man den größten gemeinschaftlichen Theiler von $\varphi(x)$ und $\varphi^1(x)$ aufsucht, und die Werthe bestimmt, für welche derselbe zu Null wird.

34. Es sei a ein Werth, welcher von einer Wurzel der Gleichung wenig verschieden ist, und der noch fehlende Theil sei z. Dann ist

$$f(a+z) = f(a) + f^1(a)\,z + f^2(a)\,\frac{z^2}{1.2} \ldots = 0.$$

Um einen genäherten Werth von z zu finden, kann man die höheren Potenzen von z weglassen, und $\qquad f(a) + f^1(a)\,z = 0$, oder $z = -\dfrac{f(a)}{f^1(a)}$

setzen. Dann ist $a - \dfrac{f(a)}{f^1(a)}$ ein Werth, welcher der Wurzel näher kommt, als a. Wenn man denselben anstatt a in die Gleichung $z = -\dfrac{f(a)}{f^1(a)}$ einsetzt, und das Resultat zu dem vorigen Näherungswerthe addirt, so erhält man einen noch mehr genäherten Werth.

Es sei z. B. $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$. Aus $f(2) = -1$, $f(3) = +16$, folgt, daß zwischen 2 und 3, und zwar näher bei 2, eine Wurzel der Gleichung liegt.

Nun ist $f^1(x) = 3x^2 - 2$, folglich $f(2) = -1$, $f^1(2) = 10$, und $z = -\frac{f(a)}{f^1(a)}$ $= \frac{1}{10}$, folglich 2,1 ein Näherungswerth der Wurzel.

Setzt man $a = 2{,}1$, so wird $f(a) = 0{,}061$, $f^1(a) = 11{,}23$, daher $z = -\frac{f(a)}{f^1(a)}$ $= -0{,}00543$, also $2{,}1 - 0{,}00543 = 2{,}09457$ ein neuer Näherungswerth. Behandelt man diesen wie die vorigen, so findet man 2,09455148 als Näherungswerth der Wurzel.

2. Von den Werthen der Functionen, wenn dieselben unbestimmt zu sein scheinen.

35. Wenn ein besonderer Werth einer Function die Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, annimmt, so erscheint er unter unbestimmter Form, ohne darum unbestimmt zu sein. So wird $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{0}{0}$ für $x = a$. Die Unbestimmtheit rührt hier daher, daß man einen gemeinschaftlichen Factor, welcher für $x = a$ zu Null wird, nicht zuvor entfernt hat. Denn es ist $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{(a - x)(a + x)}{a - x} = a + x$, folglich $= 2a$, wenn $x = a$.

Ist die gebrochene Function $y = \frac{F(x)}{f(x)}$ gegeben, welche $\frac{0}{0}$ wird, wenn $x = a$, weil $F(a) = f(a) = 0$: so ist

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F(a) + F^1(a)h + F^2(a)\frac{h^2}{1.2}\ldots}{f(a) + f^1(a)h + f^2(a)\frac{h^2}{1.2}\ldots}.$$

Weil aber $F(a) = f(a) = 0$, so ist

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F^1(a)h + F^2(a)\frac{h^2}{1.2}\ldots}{f^1(a)h + f^2(a)\frac{h^2}{1.2}\ldots} = \frac{F^1(a) + F^2(a)\frac{h}{1.2}\ldots}{f^1(a) + f^2(a)\frac{h}{1.2}\ldots}.$$

Folglich erhält man, wenn $h = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F^1(a)}{f^1(a)}.$$