

7. Sekundärliteratur

**Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen
der Realschule I. Ordnung im Waisenhouse zu Halle am ...
in dem Versammlungssaale des neuen ...**

Halle (Saale), 1838

2. Von den Werthen der Functionen, wenn dieselben unbestimmt zu sein
scheinen.

Nutzungsbedingungen

Die Digitalisate des Francke-Portals sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen für wissenschaftliche und private Zwecke heruntergeladen und ausgedruckt werden. Vorhandene Herkunftsbezeichnungen dürfen dabei nicht entfernt werden.

Eine kommerzielle oder institutionelle Nutzung oder Veröffentlichung dieser Inhalte ist ohne vorheriges schriftliches Einverständnis des Studienzentrums August Hermann Francke der Franckeschen Stiftungen nicht gestattet, das ggf. auf weitere Institutionen als Rechteinhaber verweist. Für die Veröffentlichung der Digitalisate können gemäß der Gebührenordnung der Franckeschen Stiftungen Entgelte erhoben werden.

Zur Erteilung einer Veröffentlichungsgenehmigung wenden Sie sich bitte an die Leiterin des Studienzentrums, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

Terms of use

All digital documents of the Francke-Portal are protected by copyright. They may be downloaded and printed only for non-commercial educational, research and private purposes. Attached provenance marks may not be removed.

Commercial or institutional use or publication of these digital documents in printed or digital form is not allowed without obtaining prior written permission by the Study Center August Hermann Francke of the Francke Foundations which can refer to other institutions as right holders. If digital documents are published, the Study Center is entitled to charge a fee in accordance with the scale of charges of the Francke Foundations.

For reproduction requests and permissions, please contact the head of the Study Center, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Nun ist $f'(x) = 3x^2 - 2$, folglich $f(2) = -1$, $f'(2) = 10$, und $z = -\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{1}{10}$, folglich 2,1 ein Näherungswert der Wurzel.

Setzt man $a = 2,1$, so wird $f(a) = 0,061$, $f'(a) = 11,23$, daher $z = -\frac{f(a)}{f'(a)} = -0,00543$, also $2,1 - 0,00543 = 2,09457$ ein neuer Näherungswert. Behandelt man diesen wie die vorigen, so findet man 2,09456148 als Näherungswert der Wurzel.

2. Von den Werthen der Functionen, wenn dieselben unbestimmt zu sein scheinen.

35. Wenn ein besonderer Werth einer Function die Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, annimmt, so erscheint er unter unbestimmter Form, ohne darum unbestimmt zu sein. So wird $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{0}{0}$ für $x = a$. Die Unbestimmtheit rührt hier daher, daß man einen gemeinschaftlichen Factor, welcher für $x = a$ zu Null wird, nicht zuvor entfernt hat. Denn es ist $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{(a - x)(a + x)}{a - x} = a + x$, folglich $= 2a$, wenn $x = a$.

Ist die gebrochene Function $y = \frac{F(x)}{f(x)}$ gegeben, welche $\frac{0}{0}$ wird, wenn $x = a$, weil $F(a) = f(a) = 0$: so ist

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F(a) + F'(a)h + F''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2} \dots}{f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2} \dots}$$

Weil aber $F(a) = f(a) = 0$, so ist

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F'(a)h + F''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2} \dots}{f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2} \dots} = \frac{F'(a) + F''(a)\frac{h}{1 \cdot 2} \dots}{f'(a) + f''(a)\frac{h}{1 \cdot 2} \dots}$$

Folglich erhält man, wenn $h = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

Wäre auch $\frac{F'(a)}{f'(a)} = \frac{0}{0}$, so würde in gleicher Weise folgen $\frac{F''(a)}{f''(a)} = \frac{F'(a)}{f'(a)}$, folglich

auch $\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F''(a)}{f''(a)}$ u. s. w.

Man bilde also, wenn $y = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{0}{0}$ für $x = a$ ist, den Quotienten derjenigen Ableitungen von gleicher Ordnung, welche zuerst nicht zugleich für $x = a$ zu Null werden, so giebt dieser den wahren Werth jenes Bruches.

1) Für $x = a$ ist $\frac{x^3 + 5ax^2 - a^2x - 5a^2}{x^2 - a^2} = \frac{3x^2 + 10ax - a^2}{2x} = \frac{12a^2}{2a} = 6a$.

2) Für $x = 0$ ist $\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$.

3) Für $x = 0$ ist $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$.

4) Für $x = 0$ ist $\frac{x}{\sin x^2} = \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{0} = \infty$.

5) Für $x = 0$ ist $\frac{\log(1-x)}{x} = -1$.

6) Eben so kann man die wahren Werthe von $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$, $\frac{a^x - b^x}{x}$, $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, $\frac{x - \sin x}{x^3}$, für $x = 0$, und von $\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$, $\frac{x^x - x}{1-x+\log x}$, $\frac{(1+x)\log x}{(1-x)^2}$, für $x = 1$ bestimmen.

36. Wenn die gebrochene Function $y = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ wird für $x = a$, so dividire man Zähler und Nenner durch $F(x) f(x)$. Alsdann erhält man $y = \frac{1}{f(x)} : \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{F(x)}{1}$ für $x = a$, wovon der wahre Werth gefunden werden kann (35.), z. B. für $\frac{\log x}{x}$ der Werth 0, wenn $x = \infty$.

Wenn dagegen $y = F(x) \cdot f(x)$ gegeben ist, und man findet $F(a) = 0$, $f(a) = \infty$, also $y = 0 \cdot \infty$ für $x = a$: so setzt man $y = F(x) : \frac{1}{f(x)} = \frac{0}{0}$ für $x = a$, und be-

stimmt den wahren Werth wie vorhin (35.), z. B. $\frac{c}{e} a^x$, wenn man in $\frac{a^x(b+ex)}{d+ex}$ den Werth von x unendlich groß setzt.

3. Von den größten und kleinsten Werthen der Functionen.

37. Wenn für $x = a$ der Werth von $f(x)$ größer ist, als die benachbarten Werthe $f(x+h)$ und $f(x-h)$, wie klein man auch h annehmen möge: so ist dieser Werth $f(a)$ ein Größtes (Maximum); und wenn er kleiner ist, als die benachbarten Werthe, ein Kleinstes (Minimum).

Soll also $f(x)$ ein $\begin{Bmatrix} \text{Größtes} \\ \text{Kleinstes} \end{Bmatrix}$ werden, so muß $\begin{Bmatrix} f(x) > f(x+h) \\ f(x) < f(x+h) \end{Bmatrix}$, und zugleich $\begin{Bmatrix} f(x) > f(x-h) \\ f(x) < f(x-h) \end{Bmatrix}$ sein, oder es muß, wenn $f(x)$ positiv ist, $f(x+h) - f(x)$ und zugleich $f(x-h) - f(x)$ $\begin{Bmatrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{Bmatrix}$ sein, wie klein man auch h annehmen möge.

$$\text{Nun ist } f(x+h) - f(x) = f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} \dots \left. \vphantom{f(x+h) - f(x)} \right\} (12.)$$

$$\text{und } f(x-h) - f(x) = -f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} - f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} \dots$$

Wenn nun $f'(x)$ nicht Null ist, so kann h so klein angenommen werden, daß $f'(x)h$ größer ist, als die Summe aller nachfolgenden Glieder, folglich das Vorzeichen der Reihen von diesem ersten Gliede abhängt (14.). Dieß ist aber in beiden Reihen verschieden. Es können daher $f(x+h) - f(x)$ und $f(x-h) - f(x)$ nicht einerlei Vorzeichen haben, d. h. es kann $f(x)$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes sein.

$$\text{Wenn dagegen } f'(x) = 0 \text{ ist, so ist } f(x+h) - f(x) = f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} \dots$$

$$\text{und } f(x-h) - f(x) = f''(x)\frac{h^2}{1.2} - f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} \dots$$

Für hinlänglich kleine Werthe von h sind beide Reihen mit $f''(x)$ zugleich negativ, oder positiv (14.). Die Wurzeln von $f'(x) = 0$ machen daher $f(x)$ zu einem $\begin{Bmatrix} \text{Größten} \\ \text{Kleinsten} \end{Bmatrix}$, wenn sie $f''(x)$ $\begin{Bmatrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{Bmatrix}$ machen.

Ist dagegen $f(x)$ negativ, so müssen die Wurzeln von $f'(x) = 0$ den Werth von $f''(x)$ $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ machen, wenn $f(x)$ ein negatives $\begin{Bmatrix} \text{Größtes} \\ \text{Kleinstes} \end{Bmatrix}$ sein soll. Betrachtet man aber