7. Sekundärliteratur

Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen der Realschule I. Ordnung im Waisenhause zu Halle am ... in dem Versammlungssaale des neuen ...

Halle (Saale), 1838

2. Von den Werthen der Functionen, wenn dieselben unbestimmt zu sein scheinen.

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Nun ist $f^1(x) = 3x^2 - 2$, folglich $f(2) = -1$, $f^1(2) = 10$, und $z = -\frac{f(a)}{f^1(a)}$ $= \frac{1}{10}$, folglich 2,1 ein Näherungswerth der Wurzel.

Setzt man $a = 2{,}1$, so wird $f(a) = 0{,}061$, $f^1(a) = 11{,}23$, daher $z = -\frac{f(a)}{f^1(a)}$ $= -0{,}00543$, also $2{,}1 - 0{,}00543 = 2{,}09457$ ein neuer Näherungswerth. Behandelt man diesen wie die vorigen, so findet man 2,09455148 als Näherungswerth der Wurzel.

2. Von den Werthen der Functionen, wenn dieselben unbestimmt zu sein scheinen.

35. Wenn ein besonderer Werth einer Function die Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, annimmt, so erscheint er unter unbestimmter Form, ohne darum unbestimmt zu sein. So wird $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{0}{0}$ für $x = a$. Die Unbestimmtheit rührt hier daher, daß man einen gemeinschaftlichen Factor, welcher für $x = a$ zu Null wird, nicht zuvor entfernt hat. Denn es ist $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{(a - x)(a + x)}{a - x} = a + x$, folglich $= 2a$, wenn $x = a$.

Ist die gebrochene Function $y = \frac{F(x)}{f(x)}$ gegeben, welche $\frac{0}{0}$ wird, wenn $x = a$, weil $F(a) = f(a) = 0$: so ist

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F(a) + F^1(a)h + F^2(a)\frac{h^2}{1.2}\cdots}{f(a) + f^1(a)h + f^2(a)\frac{h^2}{1.2}\cdots}.$$

Weil aber $F(a) = f(a) = 0$, so ist

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F^1(a)h + F^2(a)\frac{h^2}{1.2}\cdots}{f^1(a)h + f^2(a)\frac{h^2}{1.2}\cdots} = \frac{F^1(a) + F^2(a)\frac{h}{1.2}\cdots}{f^1(a) + f^2(a)\frac{h}{1.2}\cdots}.$$

Folglich erhält man, wenn $h = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F^1(a)}{f^1(a)}.$$

Wäre auch $\frac{F^1(a)}{f^1(a)} = \frac{0}{0}$, so würde in gleicher Weise folgen $\frac{F^1(a)}{f^1(a)} = \frac{F^2(a)}{f^2(a)}$, folglich auch $\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F^2(a)}{f^2(a)}$ u. s. w.

Man bilde also, wenn $y = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{0}{0}$ für $x = a$ ist, den Quotienten derjenigen Ableitungen von gleicher Ordnung, welche zuerst nicht zugleich für $x = a$ zu Null werden, so giebt dieser den wahren Werth jenes Bruches.

1) Für $x = a$ ist $\frac{x^3 + 5ax^2 - a^2x - 5a^2}{x^2 - a^2} = \frac{3x^2 + 10ax - a^2}{2x} = \frac{12a^2}{2a} = 6a.$

2) Für $x = 0$ ist $\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$

3) Für $x = 0$ ist $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$

4) Für $x = 0$ ist $\frac{x}{\sin x^2} = \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{0} = \infty.$

5) Für $x = 0$ ist $\frac{\log(1 - x)}{x} = -1.$

6) Eben so kann man die wahren Werthe von $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$, $\frac{a^x - b^x}{x}$, $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, $\frac{x - \sin x}{x^3}$, für $x = 0$, und von $\frac{\log x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\frac{1 - x + \log x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$, $\frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$, $\frac{(1 + x)\log x}{(1 - x)^2}$, für $x = 1$ bestimmen.

36. Wenn die gebrochene Function $y = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ wird für $x = a$, so dividire man Zähler und Nenner durch $F(x)\,f(x)$. Alsdann erhält man $y = \frac{1}{f(x)} : \frac{1}{F(x)} = \frac{0}{0}$ für $x = a$, wovon der wahre Werth gefunden werden kann (35.), z. B. für $\frac{\log x}{x}$ der Werth 0, wenn $x = \infty$.

Wenn dagegen $y = F(x) . f(x)$ gegeben ist, und man findet $F(a) = 0$, $f(a) = \infty$, also $y = 0 . \infty$ für $x = a$: so setzt man $y = F(x) : \frac{1}{f(x)} = \frac{0}{0}$ für $x = a$, und bestimmt den wahren Werth wie vorhin (35.), z. B. $\frac{c}{e}a^x$, wenn man in $\frac{a^x(b+cx)}{d+ex}$ den Werth von x unendlich groß setzt.

3. Von den größten und kleinsten Werthen der Functionen.

37. Wenn für $x = a$ der Werth von $f(x)$ **größer** ist, als die benachbarten Werthe $f(x+h)$ und $f(x-h)$, wie klein man auch h annehmen möge: so ist dieser Werth $f(a)$ ein **Größtes** (Maximum); und wenn er kleiner ist, als die benachbarten Werthe, ein **Kleinstes** (Minimum).

Soll also $f(x)$ ein $\left\{\begin{matrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{matrix}\right\}$ werden, so muß $\left\{\begin{matrix}f(x) > f(x+h)\\ f(x) < f(x+h)\end{matrix}\right\}$, und **zugleich** $\left\{\begin{matrix}f(x) > f(x-h)\\ f(x) < f(x-h)\end{matrix}\right\}$ sein, oder es muß, wenn $f(x)$ **positiv** ist, $f(x+h) - f(x)$ und zugleich $f(x-h) - f(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ sein, wie klein man auch h annehmen möge.

$$\left.\begin{aligned}\text{Nun ist } f(x+h) - f(x) &= f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\dots\\ \text{und}\quad f(x-h) - f(x) &= -f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} - f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\dots\end{aligned}\right\}(12.)$$

Wenn nun $f^1(x)$ nicht Null ist, so kann h so klein angenommen werden, daß $f^1(x)h$ größer ist, als die Summe aller nachfolgenden Glieder, folglich das Vorzeichen der Reihen von diesem ersten Gliede abhängt (14). Dieß ist aber in beiden Reihen **verschieden**. Es können daher $f(x+h) - f(x)$ und $f(x-h) - f(x)$ nicht **einerlei** Vorzeichen haben, d. h. es kann $f(x)$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes sein.

Wenn dagegen $f^1(x) = 0$ ist, so ist $f(x+h) - f(x) = f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\dots$

und $f(x-h) - f(x) = f^2(x)\frac{h^2}{1.2} - f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\dots$

Für hinlänglich kleine Werthe von h sind beide Reihen mit $f^2(x)$ zugleich negativ, oder positiv (14.). **Die Wurzeln von $f^1(x) = 0$ machen daher $f(x)$ zu einem** $\left\{\begin{matrix}\text{Größten}\\ \text{Kleinsten}\end{matrix}\right\}$, **wenn sie** $f^2(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ **machen.**

Ist dagegen $f(x)$ **negativ**, so müssen die Wurzeln von $f^1(x) = 0$ den Werth von $f^2(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ machen, wenn $f(x)$ ein negatives $\left\{\begin{matrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{matrix}\right\}$ sein soll. Betrachtet man aber