7. Sekundärliteratur

Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen der Realschule I. Ordnung im Waisenhause zu Halle am ... in dem Versammlungssaale des neuen ...

Halle (Saale), 1838

3. Von den größten und kleinsten Werthen der Functionen.

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

stimmt den wahren Werth wie vorhin (35.), z. B. $\frac{c}{e} a^x$, wenn man in $\frac{a^x (b + cx)}{d + ex}$ den Werth von x unendlich groß setzt.

3. Von den größten und kleinsten Werthen der Functionen.

37. Wenn für $x = a$ der Werth von $f(x)$ größer ist, als die benachbarten Werthe $f(x + h)$ und $f(x - h)$, wie klein man auch h annehmen möge: so ist dieser Werth $f(a)$ ein Größtes (Maximum); und wenn er kleiner ist, als die benachbarten Werthe, ein Kleinstes (Minimum).

Soll also $f(x)$ ein $\begin{Bmatrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{Bmatrix}$ werden, so muß $\begin{Bmatrix} f(x) > f(x+h) \\ f(x) < f(x+h) \end{Bmatrix}$, und zugleich $\begin{Bmatrix} f(x) > f(x-h) \\ f(x) < f(x-h) \end{Bmatrix}$ sein, oder es muß, wenn $f(x)$ positiv ist, $f(x + h) - f(x)$ und zugleich $f(x - h) - f(x) \begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ sein, wie klein man auch h annehmen möge.

$$\left.\begin{aligned} \text{Nun ist } f(x+h) - f(x) &= f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots \\ \text{und}\quad f(x-h) - f(x) &= -f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} - f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots \end{aligned}\right\} (12.)$$

Wenn nun $f^1(x)$ nicht Null ist, so kann h so klein angenommen werden, daß $f^1(x)h$ größer ist, als die Summe aller nachfolgenden Glieder, folglich das Vorzeichen der Reihen von diesem ersten Gliede abhängt (14). Dieß ist aber in beiden Reihen verschieden. Es können daher $f(x + h) - f(x)$ und $f(x - h) - f(x)$ nicht einerlei Vorzeichen haben, d. h. es kann $f(x)$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes sein.

Wenn dagegen $f^1(x) = 0$ ist, so ist $f(x+h) - f(x) = f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$

und $$f(x-h) - f(x) = f^2(x)\frac{h^2}{1.2} - f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$$

Für hinlänglich kleine Werthe von h sind beide Reihen mit $f^2(x)$ zugleich negativ, oder positiv (14.). Die Wurzeln von $f^1(x) = 0$ machen daher $f(x)$ zu einem $\begin{Bmatrix}\text{Größten}\\ \text{Kleinsten}\end{Bmatrix}$, wenn sie $f^2(x) \begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ machen.

Ist dagegen $f(x)$ negativ, so müssen die Wurzeln von $f^1(x) = 0$ den Werth von $f^2(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ machen, wenn $f(x)$ ein negatives $\begin{Bmatrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{Bmatrix}$ sein soll. Betrachtet man aber ein negatives $\left\{\begin{matrix}\text{Größtes}\\\text{Kleinstes}\end{matrix}\right\}$ als ein absolut $\left\{\begin{matrix}\text{Kleinstes}\\\text{Größtes}\end{matrix}\right\}$, so reicht die für positive Werthe von $f(x)$ gefundene Regel auch für negative Werthe von $f(x)$ aus. Wird durch eine Wurzel von $f^1(x) = 0$ auch $f^2(x) = 0$: so muß auch, wie leicht erhellet, durch dieselbe $f^3(x) = 0$, aber $f^4(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ werden, wenn der Werth von $f(x)$ ein $\left\{\begin{matrix}\text{Größtes}\\\text{Kleinstes}\end{matrix}\right\}$ sein soll. Uberhaupt muß die erste nicht verschwindende Ableitung von *gerader* Ordnung sein, damit ein Größtes oder Kleinstes Statt finden könne.

38. *Beispiele.* 1) $f(x) = a + bx - cx^2$ giebt $f^1(x) = b - 2cx$, und $f^2(x) = -2c$. Aus $f^1(x) = b - 2cx = 0$, folgt $x' = \frac{b}{2c}$. Nun ist $f(x') = a + \frac{b^2}{4c}$ und $f^2(x') = -2c$. Folglich $f(x') = a + \frac{b^2}{4c}$ der größeste Werth, welchen $f(x)$ annehmen kann.

Für $f(x) = 15 + 12x - 2x^2$ ist $x' = 3$ und $f(3) = 33$.

Setzt man für x nach einander 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6..., so findet man für $f(x)$ die Werthe 15, 25, 31, 33, 31, 25, 15...

2) $f(x) = a + bx + cx^2$ giebt $f^1(x) = b + 2cx$, und $f^2(x) = 2c$. Für $f^1(x) = 0$ erhält man $x' = -\frac{b}{2c}$, und $f(x') = a - \frac{b^2}{4c}$, welches ein *Kleinstes* ist, weil $f^2(x') = 2c$, also positiv ist.

3) $f(x) = a + (x - b)^3$ giebt $f^1(x) = 3(x - b)^2$, und $f^2(x) = 6(x - b)$. Für $f^1(x) = 0$ wird $x' = b$ und $f^2(b) = 0$. Aber $f^3(b) = 6$, folglich hat $f(x)$ weder ein Größtes, noch ein Kleinstes.

4) $f(x) = a + (x - b)^4$ giebt $f^1(x) = 4(x - b)^3$, $f^2(x) = 12(x - b)^2$, $f^3(x) = 24(x - b)$, $f^4(x) = 24$. Für $f^1(x) = 0$ wird $x = b$ und $f^2(b) = 0$. Aber auch $f^3(b) = 0$, dagegen $f^4(b) = 24$. Folglich ist $f(b)$ ein *Kleinstes* von $f(x)$.

5) $f(x) = 2x - x^2 + (1 - x)^{\frac{5}{2}}$ giebt $f^1(x) = 2 - 2x - \frac{5}{2}(1 - x)^{\frac{3}{2}}$, und $f^2(x) = -2 + \frac{15}{4}(1 - x)^{\frac{1}{2}}$. Nun ist $f^1(x) = 2 - 2x - \frac{5}{2}(1 - x)^{\frac{3}{2}} = (1 - x)(2 - \frac{5}{2}\sqrt{1 - x})$, und wird Null wenn $x' = 1$, und wenn $x'' = \frac{9}{25}$. Es ist aber $f^2(1) = -2$. Folglich ist $f(1) = 1$ ein *Größtes* von $f(x)$. Ferner ist $f^2(\frac{9}{25}) = +1$. Folglich ist $f(\frac{9}{25}) = \frac{2869}{3125}$ ein *Kleinstes* von $f(x)$.

6) Für $f(x) = x^x$ ist $f^1(x) = (1 + \log x)x^x$ und $f^2(x) = \left\{\frac{1}{x} + (1 + \log x)^2\right\}x^x$.

$f^1(x) = 0$ giebt $1 + \log x = 0$, also $1 = -\log x = \log\frac{1}{x}$, folglich $e = \frac{1}{x}$

und $x = \frac{1}{e}$. Nun ist $f^2\left(\frac{1}{e}\right) = e\sqrt[e]{\frac{1}{e}}$, also positiv, daher ist $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ ein Kleinstes von x^x.

39. Aufgaben. 1) Man soll unter allen Triangeln, die einerlei Grundlinie a, und denselben Umfang 2p haben, den größten finden.

Es sei x die eine, $2p - a - x$ die andere Seite. Der Inhalt des Triangels $F = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}$ wird ein Größtes, wenn $p(p-a)(p-x)(a+x-p)$, oder wenn $(p-x)(a+x-p)$ ein Größtes ist. Aus $f(x) = (p-x)(a+x-p)$ folgt aber $f^1(x) = p - x - (a+x-p) = 2p - a - 2x$, und $f^2(x) = -2$. Es ist also der Inhalt ein Größtes, wenn $x = p - \frac{a}{2}$, also auch $2p - a - x = p - \frac{a}{2}$, also der Triangel gleichschenklig ist.

2) Fig. 2. Auf einer geraden Linie, CD, einen solchen Punkt, E, anzugeben, daß die Summe der Entfernungen desselben von zweien Punkten, A, B, welche durch ihre senkrechten Abstände, AC, BD, von der Linie CD gegeben sind, ein Kleinstes werde.

Es sei $CD = d$, $AC = a$, $BD = b$, $CE = x$. Dann ist $AE = \sqrt{a^2 + x^2}$, $BE = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$, und $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$. Folglich $f^1(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \frac{CE}{AE} - \frac{ED}{BE} = \cos AEC - \cos BED$. Es verlangt also $f^1(x) = 0$, daß $\cos AEC = \cos BED$, oder, weil $AEC + BED < 2$ R., $AEC = BED$ sei, in welchem Falle $f(x)$ ein Kleinstes wird.

3) Fig. 3. Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels ist ein Punkt, D, mittelst seiner senkrechten Abstände, DE, DF, von den Schenkeln des Winkels gegeben. Man soll durch denselben eine gerade Linie so ziehen, daß das abgeschnittene Dreieck, HAG, ein Kleinstes sei.

Es sei $DF = a$, $DE = b$. Der Winkel $DGA = w$ wird gesucht. Nun ist $AG = AE + EG = a + b \cot g\, w$, $AH = AF + FH = b + a \operatorname{tg} w$. Folglich der Inhalt des Dreiecks $AGH = \frac{1}{2} AG . AH = \frac{1}{2}(a + b \cot g\, w)(b + a \operatorname{tg} w)$. Es soll nun $f(w) = (a + b \cot g\, w)(b + a \operatorname{tg} w) = 2ab + a^2 \operatorname{tg} w + b^2 \cot g\, w$ ein Kleinstes werden. Man findet $f^1(w) = \frac{a^2}{\cos w^2} - \frac{b^2}{\sin w^2} = \frac{a^2 \sin w^2 - b^2 \cos w^2}{\cos w^2 \sin w^2}$.

Folg=

Folglich, wenn $f^1(w) = 0$ gesetzt wird, $a \sin w = b \cos w$, oder $\tang w = \frac{b}{a}$ $= \frac{b}{EG}$, folglich $EG = a = AE$. Der entsprechende Werth von $f(w)$ ist ein Kleinstes. Man bilde zur Bestätigung $f^2(w)$. Wenn der gegebene Winkel kein rechter ist, sondern $= \alpha$, und DF, DE, mit den Schenkeln desselben parallel sind: so findet man den Inhalt des Dreiecks

$$HAG = \tfrac{1}{2} AG \, . \, AH \sin\alpha = \tfrac{1}{2} \sin\alpha \left(a + \frac{b \sin(\alpha + w)}{\sin w}\right)\left(b + \frac{a \sin w}{\sin(\alpha + w)}\right).$$

Dieser Ausdruck wird ebenfalls ein Kleinstes, wenn $EG = AE$ genommen wird.

4) Fig. 8. Die Helligkeit zweier Lichter, A, B, verhält sich wie $1 : m$. Man soll auf der sie verbindenden geraden Linie, AB, denjenigen Punkt, F, angeben, der am schwächsten beleuchtet wird.

Es sei $AB = d$, $AF = x$, $FB = d - x$. Die Beleuchtung des Punktes F ist $\frac{1}{x^2} + \frac{m}{(d-x)^2} = f(x)$. Aus $f^1(x) = \frac{2m}{(d-x)^3} - \frac{2}{x^3} = 0$ folgt $mx^3 = (d-x)^3$, folglich $x = \frac{d}{1 + \sqrt[3]{m}}$. Dieser Werth macht $f(x)$ zu einem Kleinsten, weil $f^2(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{6m}{(d-x)^4}$, also positiv ist. Für gleich helle Lichter liegt der gesuchte Punkt in der Mitte von AB.

5) Ein oben offenes rechtwinkliges Gerinne, dessen Queerschnitt $= a^2$ ist, soll den kleinsten Umfang erhalten. Man soll die Breite und Höhe desselben angeben.

Man setze die Breite $= x$, so ist die Höhe $= \frac{a^2}{x}$, und der Umfang $f(x) = x + \frac{2a^2}{x}$. $f^1(x) = 1 - \frac{2a^2}{x^2} = 0$ giebt $x' = a\sqrt{2}$, und $f(x')$ wird ein Kleinstes, weil $f^2(x) = \frac{4a^2}{x^3}$ ist. Weil nun die Höhe $= \frac{a^2}{x} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist, so ist Breite : Höhe $= a\sqrt{2} : \frac{a}{\sqrt{2}} = 2 : 1$.

6) Ein oben offenes rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, soll bei gegebenem Inhalte die kleinste Oberfläche haben. Wie verhält sich die Seite der Grundfläche zur Höhe?

Die Seite der Grundfläche sei x, die Höhe z, der Inhalt a^3. Dann ist $z = \frac{a^3}{x^2}$. Ferner ist die Oberfläche $f(x) = x^2 + 4xz = x^2 + \frac{4a^3}{x}$, also $f^1(x) = 2x - \frac{4a^3}{x^2} = 0$. Man findet $x' = a\sqrt[3]{2}$. Da $f^2(x) = 2 + \frac{8a^3}{x^3}$ positiv wird, so ist $f(x')$ ein Kleinstes. Weil $z = \frac{a^3}{x^2} = \frac{1}{2}a\sqrt[3]{2}$, so ist $x : z = a\sqrt[3]{2} : \frac{1}{2}a\sqrt[3]{2} = 2 : 1$.

7) **Fig. 4.** Aus den Ecken eines Rechtecks, **ABCD**, sollen vier gleich große Quadrate dergestalt ausgeschnitten werden, daß aus dem übrig bleibenden Theile ein Kasten gebildet werden kann, dessen Inhalt ein Größtes sei.

Es sei $AB = a$, $AD = b$, die Seite eines der gesuchten Quadrate sei x: so wird $GH = a - 2x$, $GK = b - 2x$, also der Inhalt des Kastens $GH \times GK \times GL = (a - 2x)(b - 2x)x = f(x)$. Folglich ist $f^1(x) = ab - 4(a+b)x + 12x^2$, und $f^2(x) = 24x - 4(a+b)$. Aus $f^1(x) = 0$ folgt $x = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$. Nimmt man das obere Zeichen, so wird $f^2(x) = +\sqrt{a^2 - ab + b^2}$, also giebt dieser Werth ein Kleinstes von f(x). Nimmt man das untere Zeichen, so wird $f^2(x) = -4\sqrt{a^2 - ab + b^2}$, folglich wird der Werth von f(x) ein Größtes.

8) Man soll aus einem cylindrischen Baumstamme den stärksten Balken schneiden, wenn sich die Festigkeiten gleich langer Balken derselben Holzart wie die Producte aus ihrer Breite und dem Quadrate ihrer Dicke verhalten.

Es sei a der Durchmesser vom Queerschnitte des Cylinders, x die gesuchte Breite, und z die Dicke des Balkens. Der Balken ist am stärksten, wenn xz^2 ein Größtes ist. Nun ist $z^2 = a^2 - x^2$, folglich $f(x) = x(a^2 - x^2)$, und $f^1(x) = a^2 - 3x^2$, $f^2(x) = -6x$. Aus $f^1(x) = 0$ folgt $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Weil $z^2 = a^2 - x^2 = \frac{2}{3}a^2$, also $z = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, so folgt $x : z = a\sqrt{\frac{1}{3}} : a\sqrt{\frac{2}{3}} = 1 : \sqrt{2}$, beinahe wie 5 : 7, oder 12 : 17 u. s. w.

Man theile (**Fig. 5.**) den Durchmesser **AB** des Kreises in drei gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten **C** und **D** die Perpendikel **CE**, **DF**, und vollende die Figur **AEBF**: so ist diese der Queerschnitt des verlangten Balkens. Denn $AC : AE = AE : AB$, oder $\frac{1}{3}a : x = x : a$, also $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

40. Man kann auf dieselbe Weise folgende Aufgaben lösen:

1) In ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck ein anderes zu beschreiben, dessen Spitze auf der ungleichen Seite steht, und dessen Inhalt ein Größtes sei.

2) In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, dessen Inhalt ein Größtes sei.

3) In einen gegebenen Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, welches an Inhalt und Umfang ein Größtes sei.

4) In einen gegebenen Viertelkreis ein Rechteck so zu zeichnen, daß zwei Seiten in die begränzenden Halbmesser fallen, der Inhalt aber ein Größtes sei.

5) Man soll in einem Dreiecke einen Punkt so bestimmen, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Winkelpunkten ein Kleinstes werde.

6) Durch einen Punkt in der Ebene eines rechten Winkels die kürzeste Verbindungslinie beider Schenkel zu ziehen.

7) Die Dimensionen eines Cylinders anzugeben, dessen Oberfläche bei gegebenem Inhalte ein Kleinstes werde.

8) Dasselbe für ein oben offenes cylindrisches Gefäß.

9) Die Dimensionen eines in einer gegebenen Kugel beschriebenen Cylinders anzugeben, wenn dessen Inhalt ein Größtes sein soll.

10) Dasselbe für den eingeschriebenen größten, und für den umschriebenen kleinsten Kegel.

11) Man soll den Werth von x angeben, für welchen $y = x \tang w - \frac{gx^2}{c^2 \cos w^2}$ ein Größtes wird.

12) Die Anlage eines Mühlkanals, dessen Queerschnitt **ABCD** einen gegebenen Inhalt a^2 hat, ist am vortheilhaftesten, wenn die vom Wasser bespülte Fläche, also wenn $AC + CD + DB$ ein Kleinstes wird. Wenn der Winkel $ACD = BDC = w$ gegeben ist: so soll **AC**, **CD**, so bestimmt werden, daß jene Fläche ein Kleinstes sei.

41. Ist y von x durch die Gleichung $u = f(x, y) = 0$ abhängig: so bestimme man $\frac{dy}{dx}$ (29.), und $\frac{d^2y}{dx^2}$ (31.), nämlich $\frac{dy}{dx} = -\left(\left(\frac{du}{dx}\right) : \left(\frac{du}{dy}\right)\right)$, und, wenn $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$.

Nun wird y ein Größtes oder Kleinstes, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$, d. h. wenn entweder $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, oder $\left(\frac{du}{dy}\right) = \infty$. In beiden Fällen ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)$. Daher gehören diejenigen Werthe von x, welche die partielle Ableitung nach x zu Null, oder die partielle Ableitung nach y unendlich groß machen, einem $\begin{cases}\text{Größten}\\ \text{Kleinsten}\end{cases}$ von y an, wenn durch dieselben die partielle Ableitung von $\frac{dy}{dx}$ nach x $\begin{cases}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{cases}$ wird.

42. Wenn $u = f(x, y)$ ein Größtes oder Kleinstes werden soll, so muß für beliebig kleine Werthe von h, und für beliebige Werthe von p

im ersten Falle $f(x-h, y-ph) < f(x, y) > f(x+h, y+ph)$,
im zweiten Falle $f(x-h, y-ph) > f(x, y) < f(x+h, y+ph)$

sein. Man findet mit Hülfe von (27.), ähnlich wie in (37.), daß für jeden beliebigen Werth von p

$$1)\ \left(\frac{du}{dx}\right) + p\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,\ \text{und}\ 2)\ \frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdy} + p^2\frac{d^2u}{dx^2}\ \begin{cases}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{cases}$$

sein muß für ein $\begin{cases}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{cases}$ von u.

Die erste Bedingung kann für beliebige Werthe von p nur erfüllt werden, wenn

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0,\ \text{und zugleich}\ \left(\frac{du}{dy}\right) = 0\ \text{gesetzt wird.}$$

Ob die Werthe von x und y, welche sich aus diesen beiden Gleichungen ergeben, u zu einem Größten oder Kleinsten machen, hängt von dem Vorzeichen des Ausdrucks (2.) ab, welcher für hinlänglich kleine Werthe von p das Vorzeichen des ersten Gliedes $\frac{d^2u}{dx^2}$ hat. Folglich können jene Werthe von x und y den Werth von u zu einem $\begin{cases}\text{Größten}\\ \text{Kleinsten}\end{cases}$ machen, wenn $\frac{d^2u}{dx^2}$ $\begin{cases}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{cases}$ ist. Ferner darf $\frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdy} + p^2\frac{d^2u}{dy^2}$ für keinen Werth von p sein Zeichen ändern, damit dieser Ausdruck auch für beliebige Werthe von p dasjenige Zeichen behalte, was er für hinlänglich kleine Werthe von p hat, nämlich das Vorzeichen von $\frac{d^2u}{dx^2}$. Nun kann aber der Ausdruck $A + 2Bx + Cx^2$ sein Zeichen nur dann niemals ändern, wenn er für keinen reellen Werth von x Null werden kann, d. h. wenn $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}$ imaginär ist. Dieß findet nur Statt, wenn A und C einerlei Vorzeichen haben, und zugleich $AC > B^2$ ist. Dann ist $AC - B^2$ eine positive Zahl, was durch $AC - B^2 > 0$ angedeutet werde. Es muß daher durch die aus $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ für x und y hergeleiteten Werthe

$$\frac{d^2u}{dx^2} \begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}, \text{ und } \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} - \left\{\frac{d^2u}{dxdy}\right\}^2 > 0$$

werden, wenn der Werth von u ein $\begin{Bmatrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{Bmatrix}$ sein soll.

Beispiele. 1) Für $u = y^3 - 3axy + x^3$ ist $\left(\frac{du}{dx}\right) = 3x^2 - 3ay$, $\left(\frac{du}{dy}\right) = 3y^2 - 3ax$, $\frac{d^2u}{dx^2} = 6x$, $\frac{d^2u}{dxdy} = -3a$, $\frac{d^2u}{dy^2} = 6y$. Die Gleichung $\left(\frac{du}{dx}\right) = 3x^2 - 3ay = 0$ giebt $x^2 = ay$, und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ giebt $y^2 = ax$. Hieraus folgt $x = y = a$, der Werth von $\frac{d^2u}{dx^2} = 6a = \frac{d^2u}{dy^2}$. Weil nun $\frac{d^2u}{dx^2}$ positiv ist, und $\frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = 27a^2$, also größer ist, als Null: so ist der Werth von u für $x = y = a$ ein Kleinstes.

Die Gleichungen $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ werden auch befriedigt, wenn $x = y = 0$. Dann ist aber $\frac{d^2u}{dx^2} = 0 = \frac{d^2u}{dy^2}$, also $\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = -9a^2$, also keine positive Zahl. Folglich ist für $x = y = 0$ der Werth von u weder ein Größtes, noch ein Kleinstes.

2) Für $u = xy - x^2y - xy^2$ ist $\left(\frac{du}{dx}\right) = y - 2yx - y^2 = y(1 - 2x - y)$, $\left(\frac{du}{dy}\right) = x - x^2 - 2xy = x(1 - 2y - x)$. Ferner $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = -2y$, $\frac{d^2u}{dy^2} = -2x$, $\frac{d^2u}{dxdy} = 1 - 2x - 2y$. Aus $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ folgt $x = y = \frac{1}{3}$, und $x = y = 0$. Der erste Werth giebt $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$. Ferner $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2}{3}$. Folglich macht $x = y = \frac{1}{3}$ den Werth von u zu einem Größten. Für $x = y = 0$ findet dagegen weder ein Größtes, noch ein Kleinstes Statt, weil $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = -\frac{1}{9}$ ist.

3) $u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ wird ein Kleinstes, wenn $x = y = a$. Hierdurch ist die Aufgabe aufgelöst: dasjenige rechtwinklige Parallelepipedon anzugeben, dessen Inhalt $= a^3$, und dessen Oberfläche ein Kleinstes sei.

4) $u = nxy + \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^3}{y}$ wird ein Kleinstes, wenn $x = y = a\sqrt[3]{\frac{2}{n}}$ $\frac{2a}{\sqrt[3]{4n}}$. Hiermit ist die Aufgabe aufgelöst: Mit einem Parallelepipedon **ABCDEF** (**Fig. 6.**) ist ein dreiseitiges Prisma **DEFGH**, wie ein Dach mit einem Gebäude, verbunden. Für einen gegebenen Inhalt dieses Körpers die kleinste Oberfläche zu finden, wenn **GK = FK = KE** ist, und die untere Grundfläche nicht mitgerechnet wird. — Es sei nämlich $AB = x$, $BC = y$, $BE = z$, so findet man den Inhalt $a^3 = xy(z + \frac{1}{4}x)$, folglich $z = \frac{a^3 - \frac{1}{4}x^2y}{xy}$, und die Oberfläche, wenn $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ durch n bezeichnet wird, $u = nxy + \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^3}{y}$. Man findet mittelst des Werthes von x und y, daß sich x zu z beinahe wie 5 zu 1 verhält.

4. Von den Berührungen.

43. Eine krumme Linie wird von einer geraden in einem Punkte berührt, wenn durch diesen Punkt keine andere gerade Linie so gezogen werden kann, daß sie in beliebiger Nähe jenes Punktes zwischen der krummen und jener geraden Linie liegt.

Die gerade Linie $y - y_1 = f^1(x_1)(x - x_1)$ berührt in dem Punkte $x_1 y_1$ die krumme Linie $y = f(x)$.

Denn könnte eine andere gerade Linie $y - y_1 = a(x - x_1)$ durch den Punkt $x_1 y_1$ so gezogen werden, daß sie in beliebiger Nähe dieses Punktes zwischen der krummen Linie und der ersten Geraden läge: so müßte für $x = x_1 + h$ der Unterschied zwischen den Ordinaten der krummen und der ersten geraden Linie größer sein, als der Unterschied zwischen den Ordinaten der zweiten und der ersten Geraden, wie klein man auch h annehmen möchte, also beständig

$$f(x_1 + h) - (y_1 + f^1(x_1)h) > (y_1 + ah) - (y_1 + f(x_1)h).$$

Wird die linke Seite nach dem Taylorschen Satze (12.) entwickelt, und beachtet, daß $y_1 = f(x_1)$, so kommt