7. Sekundärliteratur

Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen der Realschule I. Ordnung im Waisenhause zu Halle am ... in dem Versammlungssaale des neuen ...

Halle (Saale), 1838

4. Von den Berührungen.

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

3) $u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ wird ein Kleinstes, wenn $x = y = a$. Hierdurch ist die Aufgabe aufgelöst: dasjenige rechtwinklige Parallelepipedon anzugeben, dessen Inhalt $= a^3$, und dessen Oberfläche ein Kleinstes sei.

4) $u = nxy + \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^3}{y}$ wird ein Kleinstes, wenn $x = y = a\sqrt[3]{\frac{2}{n}}$ $\frac{2a}{\sqrt[3]{4n}}$. Hiermit ist die Aufgabe aufgelöst: Mit einem Parallelepipedon **ABCDEF** (**Fig. 6.**) ist ein dreiseitiges Prisma **DEFGH**, wie ein Dach mit einem Gebäude, verbunden. Für einen gegebenen Inhalt dieses Körpers die kleinste Oberfläche zu finden, wenn $GK = FK = KE$ ist, und die untere Grundfläche nicht mitgerechnet wird. — Es sei nämlich $AB = x$, $BC = y$, $BE = z$, so findet man den Inhalt $a^3 = xy(z + \frac{1}{4}x)$, folglich $z = \frac{a^3 - \frac{1}{4}x^2y}{xy}$, und die Oberfläche, wenn $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ durch n bezeichnet wird, $u = nxy + \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^3}{y}$. Man findet mittelst des Werthes von x und y, daß sich x zu z beinahe wie 5 zu 1 verhält.

4. Von den Berührungen.

43. Eine krumme Linie wird von einer geraden in einem Punkte berührt, wenn durch diesen Punkt keine andere gerade Linie so gezogen werden kann, daß sie in beliebiger Nähe jenes Punktes zwischen der krummen und jener geraden Linie liegt.

Die gerade Linie $y - y_1 = f^1(x_1)(x - x_1)$ *berührt in dem Punkte* $x_1 y_1$ *die krumme Linie* $y = f(x)$.

Denn könnte eine andere gerade Linie $y - y_1 = a(x - x_1)$ durch den Punkt $x_1 y_1$ so gezogen werden, daß sie in beliebiger Nähe dieses Punktes zwischen der krummen Linie und der ersten Geraden läge: so müßte für $x = x_1 + h$ der Unterschied zwischen den Ordinaten der krummen und der ersten geraden Linie *größer* sein, als der Unterschied zwischen den Ordinaten der zweiten und der ersten Geraden, wie klein man auch h annehmen möchte, also beständig

$$f(x_1 + h) - (y_1 + f^1(x_1)h) > (y_1 + ah) - (y_1 + f(x_1)h).$$

Wird die linke Seite nach dem Taylorschen Satze (12.) entwickelt, und beachtet, daß $y_1 = f(x_1)$, so kommt

$$f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2}+f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots>(a-f^1(x_1))\,h,$$

oder
$$f^2(x_1)\frac{h}{1.2}+f^3(x_1)\frac{h^2}{1.2.3}\ldots>a-f^1(x_1).$$

Nach der Annahme ist a von $f^1(x_1)$ verschieden, also $a-f^1(x_1)$ eine angebbare Größe. Es kann aber $f^2(x_1)\frac{h}{1.2}+f^3(x)\frac{h^2}{1.2.3}\ldots$ für hinlänglich kleine Werthe von h kleiner werden, als jede beliebig kleine Größe (15.), also für solche Werthe von h unmöglich größer sein, als die angebbare Größe $a-f(x_1)$. Folglich kann die zweite gerade Linie in beliebiger Nähe des Punktes $x_1 y_1$ nicht zwischen der krummen Linie und der ersten Geraden liegen. Folglich berührt die gerade Linie $y-y_1=f^1(x_1)(x-x_1)$, oder $y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1)$, die krumme Linie $y=f(x)$ in dem Punkte $x_1 y_1$.

Da die Normale auf der Berührenden im Berührungspunkte senkrecht steht, so ist ihre Gleichung $y-y_1=-\frac{1}{f^1(x_1)}(x-x_1)$, oder $y-y_1=-\frac{dx_1}{dy_1}(x-x_1)$.

Setzt man in der Gleichung der Berührenden $y=0$, und zieht den gefundenen Werth $x=x_1-y_1\frac{dx_1}{dy_1}$ von x_1 ab: so erhält man die Subtangente $=y_1\frac{dx_1}{dy_1}$ (6.).

Versteht man unter Tangente das Stück der Berührenden zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenachse: so findet man $(\text{Tangente})^2=(\text{Subtangente})^2+y_1^2$, folglich $\text{Tangente}=y_1\sqrt{1+\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2}$.

Setzt man in der Gleichung der Normale $y=0$, und zieht x_1 von dem gefundenen Werthe $x=x_1+y\frac{dy_1}{dx_1}$ ab: so findet man die Subnormale $=y_1\frac{dy_1}{dx_1}$ (6.).

Versteht man unter Normale das Stück der auf der Berührenden im Berührungspunkte senkrechten geraden Linie, welches zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenachse liegt: so findet man $(\text{Normale})^2=(\text{Subnormale})^2+y_1^2$, folglich $\text{Normale}=y_1\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}$.

Für einen beliebigen Punkt der krummen Linie $y = f(x)$ hat man also die Werthe:

1) Subtangente $= y\,\frac{dx}{dy}$. 3) Subnormale $= y\,\frac{dy}{dx}$.

2) Tangente $= y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. 4) Normale $= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

44. Beispiele: 1) Für die Parabel $y^2 = 2px$ ist $y = \sqrt{2px}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{2px}}{p}$. Folglich die Subtangente $= y\,\frac{dx}{dy} = \sqrt{2px}\cdot\frac{\sqrt{2px}}{p} = 2x$, wie bekannt. Ferner die Subnormale $= y\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{2px}\cdot\frac{p}{\sqrt{2px}} = p$.

Man findet ferner die Tangente $= \sqrt{2px + 4x^2}$, die Normale $= \sqrt{p^2 + y^2} = \sqrt{p^2 + 2px}$.

2) Für die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{bx}$. Folglich die Subtangente $= y\,\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 - x^2}{x}$. Dieser Ausdruck ist von der kleinen Achse unabhängig. Man beschreibe daher mit der halben großen Achse einen Kreis um den Mittelpunkt der Ellipse. Zu solchen Punkten dieses Kreises und der Ellipse, welche auf einerlei Ordinate liegen, gehört dieselbe Subtangente. Folglich ist die Berührende an einen gegebenen Punkt der Ellipse leicht zu ziehen. Man findet ferner die Subnormale $= y\,\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2}$, die Tangente $= \frac{y}{b^2x}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$, die Normale $= \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$.

3) Für die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ folgt eben so $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{bx}$. Folglich die Subtangente $= \frac{x^2 - a^2}{x}$, die Subnormale $= \frac{b^2x}{a^2}$, die Tangente $= \frac{y}{b^2x}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$, die Normale $= \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$.

4) In der logarithmischen Linie sind die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten, also $x = \overset{A}{\mathrm{Log}}\, y$, oder $y = A^x = e^{x \log A}$. Da $\frac{1}{\log A}$ der Modulus m ist, so hat man $y = e^{\frac{x}{m}}$ als Gleichung der logarithmischen Linie. Nun ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} e^{\frac{x}{m}}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{m}{e^{\frac{x}{m}}}$, folglich die Subtangente $= y \frac{dx}{dy} = e^{\frac{x}{m}} \cdot \frac{m}{e^{\frac{x}{m}}} = m$, also immer dem Modulus gleich.

5) Die Cycloide oder Radlinie wird von einem Punkte der Peripherie eines Kreises beschrieben, welcher auf einer geraden Linie fortrollt, ohne zu gleiten.

Fig. 7. Ist PNQ eine Lage des auf AX rollenden Kreises, der Durchmesser PQ = 2r, N der Punkt, welcher die Cycloide beschreibt, und A der Punkt auf AX, in welchem N zuletzt die AX berührte: so nehme man AX, AY als Coordinatenachsen, und bezeichne durch v die Länge eines Bogens, welcher in einem Kreise vom Halbmesser 1 den zugehörigen Winkel am Mittelpunkte misset. Dann ist AP = Bogen NP = rv; NC = DP = OP — OD, und AC = AP — CP = AP — ND. Daraus folgt 1) $y = r - r \cos v$; 2) $x = rv - r \sin v$. Aus 1) folgt $v = \mathrm{arc}\cos \frac{r-y}{r}$ folglich $v = \mathrm{arc}\sin \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r}$. Werden diese Werthe in 2) eingesetzt, so erhält man

$$x = r\,\mathrm{arc}\cos \frac{r-y}{r} - r \sin\left(\mathrm{arc}\sin = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r}\right),$$

oder $$x = r\,\mathrm{arc}\cos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Nun ist $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$, folglich die Subtangente $= y \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{\sqrt{2ry - y^2}}$, und die Subnormale $= y \frac{dy}{dx} = \sqrt{2ry - y^2}$. Die Subnormale ist also immer dem Abstande des die Cycloide beschreibenden Punktes vom senkrechten Durchmesser des rollenden Kreises gleich, also ND, oder CP. Folglich ist NP die Normale und QN die Berührende im Punkte N. Man nehme also AF = r, ziehe FR mit AX parallel, nehme auf FR den Punkt O so, daß NO = r sei, ziehe OP senkrecht auf AX, mache OQ = OP, und ziehe NP, NQ: so ist NP die Normale und NQ die Berührende im Punkte N.

45. Bezeichnet man durch y, x, die Coordinaten einer krummen Linie $u = f(x, y) = 0$, und durch η, ξ, die Coordinaten der Berührenden: so ist deren Gleichung $\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$, und $\frac{dy}{dx}$ wird aus der Differentialgleichung der krummen Linie

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0$$

gefunden. Hierdurch wird die Gleichung der Berührenden auf die Form

$$\left(\frac{du}{dx}\right)(\xi - x) + \left(\frac{du}{dy}\right)(\eta - y) = 0$$

gebracht. Eben so findet man die Gleichung der Normale

$$\left(\frac{du}{dx}\right)(\eta - y) - \left(\frac{du}{dy}\right)(\xi - x) = 0.$$

Durch Vergleichung beider Gleichungen mit $\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0$ erhält man den Satz: Vertauscht man in der Differentialgleichung einer krummen Linie dx mit $(\xi - x)$, und dy mit $(\eta - y)$: so erhält man die Gleichung der Berührenden. Und vertauscht man dx mit $(\eta - y)$, und dy mit $-(\xi - x)$: so erhält man die Gleichung der Normale.

Beispiele. 1) Die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ giebt $xdx + ydy = 0$, folglich ist $x(\xi - x) + y(\eta - y) = 0$, oder $x\xi + y\eta = r^2$ die Gleichung der Berührenden; und $x(\eta - y) - y(\xi - x) = 0$, oder $x\eta - y\xi = 0$ die Gleichung der Normale.

2) Die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ giebt $\frac{x}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy = 0$, folglich $\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) = 0$, oder $\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1$ als Gleichung der Berührenden.

3) Eben so findet man für beliebige Punkte der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Berührenden $\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = 1$.

46. Um die Asymptoten einer krummen Linie zu finden, suche man die Lage, welche die Berührende annimmt, wenn der Berührungspunkt unendlich weit fortrückt. Für die Hyperbel z. B. ist die Gleichung der Berührenden $\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = 1$

(45, 3.), oder wenn für $\frac{y}{b}$ sein Werth $\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} = \pm\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ gesetzt wird,

$$\frac{x\xi}{a^2} \pm \frac{\eta}{b}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = 1.$$

Multiplicirt man mit $\frac{a}{x}$ so findet man $\frac{\xi}{a} \pm \frac{\eta}{b}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = \frac{a}{x}$. Wird nun x größer, als jede beliebig große Zahl, so nähern sich diese beiden geraden Linien ihrer Gränze

$$\frac{\xi}{a} \pm \frac{\eta}{b} = 0,$$

welches die Gleichungen der beiden Asymptoten der Hyperbel sind.

47. Eine krumme Linie ist in der Nähe eines Punktes $\left\{\begin{matrix}\text{hohl}\\ \text{erhaben}\end{matrix}\right\}$ gegen die Abscissenachse, wenn die Ordinaten der krummen Linie zu beiden Seiten des Punktes $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{matrix}\right\}$ sind, als die Ordinaten der an diesen Punkt gezogenen Berührenden. Ist $y = f(x)$ die krumme Linie, so ist in der Nähe des Punktes $x_1 y_1$

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + f^1(x_1)h + f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$$

$$f(x_1 - h) = f(x_1) - f^1(x_1)h + f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2} - f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$$

Aus der Gleichung der Berührenden (43.) $y - y_1 = f^1(x_1)(x - x_1)$ findet man für $x = x_1 + h$ die Ordinate $y' = y_1 + f^1(x_1)h = f(x_1) + f^1(x_1)h$, und für $x = x_1 - h$ die Ordinate $y'' = f(x_1) - f^1(x_1)h$.

Folglich ist $\quad f(x_1 + h) - y' = f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$

und $\quad f(x_1 - h) - y'' = f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2} - f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$

Liegt der Punkt $x_1 y_1$ auf der positiven Seite der Ordinaten, so ist die krumme Linie in der Nähe desselben $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{matrix}\right\}$ gegen die Abscissenachse, wenn beide Unterschiede für beliebig kleine Werthe von h $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind. Wenn aber $f^2(x_1)$ nicht Null ist, hängt für solche Werthe von h das Vorzeichen beider Ausdrücke von dem ersten

Gliede ab (14.). Daher ist die krumme Linie $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{matrix}\right\}$ gegen die Abscissenachse, wenn $f^2(x_1)$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist. Liegt der Punkt aber auf der negativen Seite der Ordinaten: so ist die krumme Linie $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{matrix}\right\}$, wenn beide Unterschiede $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ sind, also wenn $f^2(x_1)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist.

Die krumme Linie ist also in der Nähe eines Punktes $x_1\ y_1$ gegen die Abscissenachse $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{matrix}\right\}$ wenn $f^2(x_1)$ nicht Null ist, und mit $f(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{nicht einerlei}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen hat.

48. Wenn $f^2(x_1) = 0$ ist, so ist $f(x_1 + h) - y_1 = + f^3(x_1)\dfrac{h^3}{1.2.3} + \ldots$ und $f(x_1 - h) - y'' = - f^3(x_1)\dfrac{h^3}{1.2.3} + \ldots$ Es sind daher in der Nähe des Punktes $x_1\ y_1$ auf der einen Seite die Ordinaten der krummen Linie, auf der andern die Ordinaten der Berührenden größer, also die krumme Linie auf der einen Seite erhaben, auf der andern hohl. Daher ist dieser Punkt ein **Wendungspunkt** der krummen Linie. Folglich sind die Wurzeln der Gleichung $f^2(x) = 0$, wenn sie nicht zugleich $f^3(x)$ zu Null machen, die Abscissen von Wendungspunkten. Ein Werth, der auf $f^3(x)$ zu Null macht, gehört nur dann einem Wendungspunkte an, wenn auch $f^4(x)$, aber nicht $f^5(x)$ durch denselben zu Null wird, überhaupt, wenn die erste nicht verschwindende Ableitung von **ungerader** Ordnung ist.

$y = x + (x - a)^3$ und $y = x - (x - a)^3$ haben Wendungspunkte in $x = a$.

49. Wenn zwei krumme Linien durch denselben Punkt gehen, und für diesen Punkt die n ersten Ableitungen der Ordinate der einen den n ersten Ableitungen der Ordinate der andern der Reihe nach, die erste der ersten, die zweite der zweiten, gleich sind: so kann keine andere krumme Linie in der Nähe jenes Punktes zwischen ihnen liegen, sie müßte denn dieselben Bedingungen erfüllen.

Wenn $y = F(x)$, $y = f(x)$, die beiden krummen Linien sind: so ist

$$F(x_1) = f(x_1),\ F^1(x\ ) = f^1(x_1),\ F^2(x_1) = f^2(x_1), \ldots\ldots F^n(x_1) = f^n(x_1).$$

Nun ist für $x = x_1 + h$

$$F(x_1+h) = F(x_1) + F^1(x_1)h \ldots + F^n(x_1)\frac{h^n}{1.2..n} + F^{n+1}(x_1)\frac{h^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} \ldots$$

$$f(x_1+h) = f(x_1) + f^1(x_1)h \ldots + f^n(x_1)\frac{h^n}{1.2..n} + f^{n+1}(x_1)\frac{h^{n+1}}{1.2.3..(n+1} \ldots$$

und der Unterschied beider Ordinaten, wenn $F(x_1 + h)$ die größere ist,

$$F(x_1 + h) - f(x_1 + h) = \left\{F^{n+1}(x_1) - f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)} + Ph^{n+2}\ldots$$

Sollte nun eine andere krumme Linie $y = \varphi(x)$, welche durch den gemeinschaftlichen Punkt der beiden ersten geht, in der Nähe dieses Punktes zwischen ihnen liegen können: so müßte

$$F(x_1 + h) - f(x_1 + h) > \varphi(x_1 + h) - f(x_1 + h),$$

oder $\left\{F^{n+1}(x_1) - f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)} + Ph^{n+2}.. > (\varphi^1(x_1) - f^1(x_1))h + \ldots$

sein, wie klein man auch h annehmen möchte.

Also müßte auch stets

$$\left\{F^{n+1}(x_1) - f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^n}{1.2...(n+1)} + Ph^{n+1}\ldots$$

$$> \varphi^1(x_1) - f^1(x_1) + (\varphi^2 x_1 - f^2(x_1))\frac{h}{1.2}\ldots$$

sein. Wenn aber $\varphi^1(x_1) - f^1(x_1)$ nicht Null ist, so ist es eine angebbare Größe. Die linke Seite der Ungleichung kann für hinlänglich kleine Werthe von h kleiner werden, als jede beliebig kleine Größe (15.), kann also für solche Werthe von h unmöglich größer sein, als die angebbare Größe. Wenn aber $\varphi^1(x_1) - f^1(x_1) = 0$, dagegen $\varphi^2(x_1) - f^2(x_1)$ nicht Null ist, so dividire man durch h. Dann kann die linke Seite für hinlänglich kleine Werthe von h unmöglich größer sein, als die angebbare Größe $\varphi^2(x_1) - f^2(x_1)$. So kann man weiter schließen, und die Richtigkeit der Behauptung nachweisen.

Zusatz. 1. Die beiden krummen Linien $y = F(x)$ und $y = f(x)$ durchschneiden einander in dem Punkte $x_1\,y_1$, wenn n eine gerade Zahl ist. Denn alsdann ist $n + 1$ eine ungerade Zahl, folglich für $x = x_1 + h$ der Unterschied der Ordinaten

$$F(x_1 + h) - f(x_1 + h) = \left\{F^{n+1}(x_1) - f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)} + Ph^{n+2}\ldots$$

und für $x = x_1 - h$

$$F(x_1 - h) - f(x_1 - h) = -\left\{F^{n+1}(x_1) - f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)} + Ph^{n+1}\ldots$$

Folglich ist auf der einen Seite des Punktes $x_1\,y_1$, der beiden gemein ist, die Ordinate der einen krummen Linie, auf der andern Seite die Ordinate der andern krummen Linie die größere. Folglich durchschneiden die krummen Linien einander.

2. Die beiden krummen Linien durchschneiden einander in dem gemeinschaftlichen Punkte nicht, wenn n eine ungerade Zahl ist. Denn alsdann ist $n+1$ gerade, also hat der Unterschied der Ordinaten für $x_1 + h$ und $x_1 - h$ einerlei Zeichen, folglich ist auf beiden Seiten entweder die Ordinate der einen oder der andern krummen Linie die größere.

50. Von den Linien $F(x)$ und $f(x)$ sagt man, sie haben eine Berührung der nten Ordnung in einem Punkte, wenn dessen Abscisse die Ordinaten beider Linien, und die n ersten Ableitungen derselben, der Reihe nach einander gleich macht.

Eine gerade Linie $y = ax + b$ hat mit einer krummen $f(x)$ eine Berührung der ersten Ordnung, wenn $ax + b = f(x)$, und $\frac{dy}{dx} = a = f^1(x)$ ist. Da $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ für jeden Punkt der geraden Linie, $f^2(x)$ aber nur für diejenigen Punkte von $f(x)$ Null wird, deren Abscissen Wurzeln der Gleichung $f^2(x) = 0$ sind: so hat eine gerade Linie mit einer krummen eine Berührung der zweiten Ordnung nur in den Wendungspunkten der krummen Linie (48.).

Soll ein Kreis mit einer krummen Linie $f(x)$ eine Berührung der ersten Ordnung haben, so muß seine Ordinate y die Bedingungen $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$ erfüllen. Aus der Gleichung des Kreises $(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$ folgt aber $(y - b)\frac{dy}{dx} + (x - a) = 0$. Die Größen a, b, r, von welcher Lage und Größe des Kreises abhängt, müssen folglich die beiden Gleichungen

$$(f(x) - b)^2 + (x - a)^2 = r^2 \text{ und } (f(x) - b)f^1(x) + (x - a) = 0$$

befriedigen, und sind nicht mehr völlig willkürlich.

Aus der zweiten Gleichung folgt $b - f(x) = -\frac{1}{f^1(x)}(a - x)$, d. h. die Mittelpunkte der unzählig vielen Kreise, welche in einem gegebenen Punkte mit einer krummen Linie eine Berührung der ersten Ordnung haben, liegen alle auf der diesem Punkte zugehörigen Normale. Zieht man an jenen Punkt eine Berührende, so liegen diese Kreise in der Nähe des Berührungspunktes entweder zwischen der krummen Linie und der Berührenden, und sind weniger gekrümmt, als die krumme Linie; oder sie werden von der krummen Linie in der Nähe jenes Punktes umschlossen, und sind mehr gekrümmt, als die krumme Linie. Ein Kreis bildet den Uebergang von der einen Gruppe zur andern, und hat mit der krummen Linie eine solche Berührung, daß zwischen ihm und der krummen Linie kein anderer berührender Kreis liegen kann. Dieser Kreis hat mit der krummen Linie einerlei Krümmung in dem Berührungspunkte, und heißt der **Krümmungskreis**, sein Halbmesser heißt der Krümmungshalbmesser. Offenbar hat er im Allgemeinen mit der krummen Linie eine Berührung der **zweiten** Ordnung.

51. Damit ein Kreis mit einer krummen Linie $f(x)$ eine Berührung der **zweiten** Ordnung in dem Punkte x, y, habe, muß die Ordinate des Kreises y die Bedingungen $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = f^2(x)$ erfüllen.

Es müssen also statt der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&(y-b)^2+(x-a)^2=r^2\\&(y-b)\frac{dy}{dx}+(x-a)=0\\&(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0\end{aligned}\right\}\text{1. die Gleichungen}\left.\begin{aligned}&(f(x)-b)^2+(x-a)^2=r^2\\&(f(x)-b)f^1(x)+x-a=0\\&(f(x)-b)f^2(x)+(f^1(x))^2+1=0\end{aligned}\right\}2.$$

genommen werden, um mittelst derselben a, b, r, zu bestimmen. Aus den beiden letzten der Gleichungen 2. folgt

$$f(x)-b=-\frac{1+(f^1(x))^2}{f^2(x)}, \text{ und } x-a=f^1(x)\frac{1+(f^1(x))^2}{f^2(x_1)}.$$

Werden diese Werthe in die erste der Gleichungen 2. eingesetzt, so kommt

$$\left\{\frac{1+(f^1(x))^2}{f^2(x)}\right\}^2+(f^1(x))^2\left\{\frac{1+(f^1(x))^2}{f^2(x)}\right\}^2=\frac{\{1+(f^1(x))^2\}^3}{\{f^2(x)\}^2}=r^2.$$

Folglich ist $r=\pm\frac{\{1+(f^1(x))^2\}^{\frac{3}{2}}}{f^2(x)}$, also der Krümmungshalbmesser bekannt, folglich der Krümmungskreis, da sein Mittelpunkt auf der Normale liegt, der Größe und Lage nach gegeben. Man nimmt in dem Ausdrucke von r gewöhnlich das mit dem Vorzeichen von $f^2(x)$ übereinstimmende Zeichen, damit der Ausdruck positiv werde.

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser durch R und ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung irgend einer krummen Linie, so ist für beliebige Punkte derselben

$$R=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

52. **Beispiele.** 1) Für die Parabel $y=\sqrt{2px}$ ist $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{\sqrt{2px}}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ $=-\frac{p^2}{(\sqrt{2px})^3}$. Folglich ist $R=\frac{\{2px+p^2\}^{\frac{3}{2}}}{p^2}$. Nun ist aber (44, 1.) die

Normale $N = (2px + p^2)^{\frac{1}{2}}$, folglich $R = \frac{N^3}{p^2}$, woraus $p^2 : N^2 = N : R$, also eine leichte Construction sich ergiebt. — Aus $y^2 = 2px$ folgt auch $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{p^2}{y^3}$. Folglich $R = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$. Für $y = 0$ ist $R = p$.

Zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunkts dienen die Gleichungen

$$x - a = \frac{dy}{dx} \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y - b = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (51.).$$

folglich für die Parabel $a = 3x + p$, $b = -\frac{2xy}{p}$. Weil nun der Mittelpunkt auf der Normalen liegt, so kann derselbe mittelst seiner Abscisse leicht gefunden werden.

Die Gleichungen $a = 3x + p$ und $b = -\frac{2xy}{p}$ gelten nur für solche Werthe von x und y, welche Punkten der Parabel $y^2 = 2px$ zukommen, also diese Gleichung befriedigen. Eliminirt man daher aus diesen drei Gleichungen x und y, so erhält man eine Gleichung zwischen a und b, nämlich $b^3 = \frac{8}{27}(a - p)^3$. Da b und a die veränderlichen Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind, so giebt diese Gleichung den geometrischen Ort desselben. Eine solche krumme Linie nennt man Evolute oder Abgewickelte.

2) Für die Cycloide hat man (44, 5.) $x = r \operatorname{arc\,cos} \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$.

Folglich ist $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y}$. Ferner $\frac{d^2y}{ax^2} =$
$\frac{d\left\{\frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y}\right\}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{r}{y^2}$. Hieraus folgt $R = 2\sqrt{2ry}$. Aber die Normale $N = \sqrt{2ry}$ (44, 5.), folglich $R = 2N$, also leicht zu construiren.

3) Die Gleichung der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ giebt $a^2y\frac{dy}{dx} + b^2x = 0$, folglich $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$. Ferner $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2y} + \frac{b^2x}{a^2y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2y} - \frac{b^4x^2}{a^4y^3}$

$=$

$$= -\frac{b^2\{b^2x^2 + a^2y^2\}}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$ Daher ist

$$R = \frac{\{a^4y^2 + b^4x^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \frac{\{a^4 - (a^2 - b^2)x^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b}.$$

Für jeden Punkt der Ellipse ist die Normale $N = \frac{1}{a^2}(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}$ (44, 2.), folglich $(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}} = a^6N^3$, folglich

$$R = \frac{N^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}.$$

Aber $\frac{b^2}{a}$ ist die Ordinate im Brennpunkte der Ellipse, oder der halbe Parameter p, also auch hier der Krümmungshalbmesser zu construiren mittelst der Proportion $p^2 : N^2 = N : R$.

4) Für die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ erhält man dasselbe Resultat.

53. Wenn auf einem elliptischen Meridiane der Erde zwei Bogen gemessen worden sind, so läßt sich daraus die Abplattung berechnen.

Die Lage eines Ortes auf dem Meridiane wird durch die **Breite** gegeben, d. h. durch den Winkel, den die Normale mit der großen Achse der Ellipse bildet. Ist v dieser Winkel, so ist $\tang v = -\frac{dx}{dy} = \frac{a^2y}{b^2x}$, folglich $\tang v^2 = \frac{a^4y^2}{b^4x^2} = \frac{a^4 - a^2x^2}{b^2x^2}$.

Durch leichte Rechnung ergiebt sich $x^2 = \frac{a^4\cos v^2}{a^2\cos v^2 + b^2\sin v^2}$, und $a^4 - a^2x^2 + b^2x^2 = \frac{a^4b^2}{a^2\cos v^2 + b^2\sin v^2}$, folglich $R = \frac{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b} = \frac{a^2b^2}{(a^2\cos v^2 + b^2\sin v^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Es seien nun zwei Breiten v und w, die zugehörigen Krümmungshalbmesser R und R′, und $\frac{b}{a} = m$: so ist

$$R = \frac{m^2a}{(\cos v^2 + m^2\sin v^2)^{\frac{3}{2}}},\quad R' = \frac{m^2a}{(\cos w^2 + m^2\sin w^2)^{\frac{3}{2}}};$$

folglich $\frac{R}{R'} = \left\{\frac{\cos w^2 + m^2\sin w^2}{\cos v^2 + m^2\sin v^2}\right\}^{\frac{3}{2}}$, also $\left(\frac{R}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\cos w^2 + m^2\sin w^2}{\cos v^2 + m^2\sin v^2}$.

Hieraus folgt $m^2 = \dfrac{\left(\frac{R}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} \cos w^2 - \cos v^2}{\sin v^2 - \left(\frac{R}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} \sin w^2}$.

Es kann also, wenn das Verhältniß der Krümmungshalbmesser bekannt ist, das Verhältniß der Achsen $m = \frac{b}{a}$, folglich auch $1 - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a}$, oder die Abplattung gefunden werden. Für kleine Aenderungen der Breite ist aber hinreichend genau $R : R' = \Delta S : \Delta S'$, wo ΔS, $\Delta S'$, gemessene elliptische Bogen sind, deren Mitten die Breiten v und w haben, und für welche die Breitenunterschiede der Endpunkte gleich sind, z. B. 1^0 betragen. Es kann also aus zwei Gradmessungen die Gestalt der Erde bestimmt werden.

5. Die Bestimmung der Flächenräume.

54. **Fig. 8.** Der Flächenraum, **ABCD**, welcher von der Abscissenachse, dem Bogen einer krummen Linie, und den Ordinaten der Endpunkte des Bogens begränzt wird, ist als Function der Abscisse des einen Endpunktes gegeben. Man soll die Gleichung der begränzenden krummen Linie finden.

Nahe bei **B** läßt sich immer ein solcher Punkt **E** annehmen, daß von **B** nach **E** die Ordinaten fortwährend wachsen, oder abnehmen. Sie mögen wachsen. Dann ist $OF = x + h$, $FE = y + k$. Ist nun $ACDB = S = f(x)$, so ist $ACFE = f(x + h)$, und $BDFE = \Delta S = f(x + h) - f(x)$. Für beliebig kleine Werthe von x ist aber immer $BD.DF$, d. i. $yh < \Delta S$, und $EF.DF$, d. i. $(y + k)h > \Delta S$. Nun ist (12.)

$$\Delta S = \frac{dS}{dx} h + \frac{d^2S}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} \ldots \text{ und } y + k = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} \ldots,$$

folglich, da $yh < \Delta S < (y + k)h$ ist

$$yh < \frac{dS}{dx} h + \frac{d^2S}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} \ldots < yh + \frac{dy}{dx} h^2 \ldots,$$

oder

$$y < \frac{dS}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} \frac{h}{1.2} \ldots < y + \frac{dy}{dx} h \ldots$$

Da aber $\frac{dy}{dx} h + \ldots$ kleiner werden kann, als jede beliebig kleine Größe (15.), und dasselbe von $\frac{d^2S}{dx^2} \frac{h}{1.2} \ldots$ gilt, so muß