FRANCKESCHE STIFTUNGEN

DFG

7. Sekundärliteratur

Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen der Realschule I. Ordnung im Waisenhause zu Halle am ... in dem Versammlungssaale des neuen ...

Halle (Saale), 1838

6. Die Gesetze geradliniger Bewegung.

Nutzungsbedingungen
Die Digitalisate des Francke-Portals sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen für wissenschaftliche und private Zwecke heruntergeladen und ausgedruckt werden. Vorhandene Herkunftsbezeichnungen dürfen dabei nicht entfernt werden.
Eine kommerzielle oder institutionelle Nutzung oder Veröffentlichung dieser Inhalte ist ohne vorheriges schriftliches Einverständnis des Studienzentrums August Hermann Francke der Franckeschen Stiftungen nicht gestattet, das ggf. auf weitere Institutionen als Rechteinhaber verweist. Für die Veröffentlichung der Digitalisate können gemäß der Gebührenordnung der Franckeschen Stiftungen Entgelte erhoben werden.
Zur Erteilung einer Veröffentlichungsgenehmigung wenden Sie sich bitte an die Leiterin des Studienzentrums, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

Terms of use
All digital documents of the Francke-Portal are protected by copyright. They may be downloaded and printed only for non-commercial educational, research and private purposes. Attached provenance marks may not be removed.
Commercial or institutional use or publication of these digital documents in printed or digital form is not allowed without obtaining prior written permission by the Study Center August Hermann Francke of the Francke Foundations which can refer to other institutions as right holders. If digital documents are published, the Study Center is entitled to charge a fee in accordance with the scale of charges of the Francke Foundations.
For reproduction requests and permissions, please contact the head of the Study Center, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Visual Library

Folglich ist

$$\tfrac{1}{2}r^2h < \frac{ds}{dv}h + \frac{d^2s}{dv^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots < \tfrac{1}{2}r^2h + r\frac{dr}{dv}h^2\ldots$$

oder

$$\tfrac{1}{2}r^2 < \frac{ds}{dv} + \frac{d^2s}{dv^2}\frac{h}{1.2}\ldots < \tfrac{1}{2}r^2 + r\frac{dr}{dv}h\ldots$$

Dieß ist für beliebig kleine Werthe von h nur möglich, wenn

$$\tfrac{1}{2}r^2 = \frac{ds}{dv}.$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn die Zuglinien von B nach C abnehmen.

Beispiele. 1) Es sei $s = \frac{1}{4}a^2 \sin 2v$; $\frac{ds}{dv} = \frac{1}{2}a^2 \cos 2v = \frac{1}{2}r^2$. Folglich ist $r^2 = a^2 \cos 2v$. Die gefundene krumme Linie ist die Lemniscate, der Scheitelort eines Dreiecks, für welches das Product der beiden veränderlichen Seiten dem Quadrate der halben Grundlinie gleich ist. Aus $s = \frac{1}{4}a^2 \sin 2v = \frac{1}{2}(a \sin v)(a \cos v)$ ergiebt sich eine leichte Verwandlung des Flächenraums in ein rechtwinkliges Dreieck.

2) $s = \frac{p^2}{16}(\tang \frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tg} \frac{1}{2}v^3)$ führt auf $r = \frac{p}{4 \cos \frac{1}{2}v}$, oder die Parabel.

6. Die Gesetze geradliniger Bewegung.

56. Ein Körper bewegt sich in gerader Linie. Der zurückgelegte Weg x ist als Function der Zeit t gegeben. Man soll die Geschwindigkeit des Körpers für jeden beliebigen Augenblick finden.

Fig. 10. Wenn der Körper von A bis C gelangt ist, so wird sich in der Nähe von C ein solcher Punkt D angeben lassen, daß von C nach D die Geschwindigkeit fortwährend wächst, oder abnimmt. Es finde das Erstere Statt. Nun ist $AC = x = f(t)$; $AD = f(t+h)$, $CD = f(t+h) - f(t)$. Bewegte sich der Körper mit der Geschwindigkeit v, die er in C hat, gleichförmig weiter, so würde er in der Zeit h einen Raum $CE < CD$ zurücklegen. Hätte er aber in C schon die Geschwindigkeit $v + \Delta v$, mit welcher er in D ankommt: so würde er bei gleichförmiger Bewegung in der Zeit h einen Raum $CF > CD$ zurücklegen. Es ist also, wie klein man auch h annehmen möge,

$$CE < CD < CF,$$

$$vh < f(t+h) - f(t) < (v + \Delta v)h,$$

folglich $v < \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{h}{1.2}\ldots < v + \frac{dv}{dt}h\ldots$

Auf dieselbe Weise findet man $v > \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{h}{1.2} \ldots > v + \frac{dv}{dt} h \ldots$, wenn die Geschwindigkeit von **C** nach **D** fortwährend abnimmt. In beiden Fällen kann aber diese Ungleichung für beliebig kleine Werthe von h nur Statt finden, wenn

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ist. Die Geschwindigkeit also ist die Ableitung der Function, welche den zurückgelegten Weg durch die Zeit ausdrückt.

57. Für irgend eine geradlinige Bewegung kennt man die Geschwindigkeit als Function der verflossenen Zeit. Man soll die von der Zeit abhängige veränderliche Kraft finden, welche beschleunigend, oder verzögernd auf den Körper wirkt.

Ist φ diese Kraft, und $v = F(t)$, $v + \Delta v = F(t+h)$; dann ist $F(t+h) - F(t)$ die Aenderung der Geschwindigkeit, welche von der veränderlichen Kraft herrührt. Wäre die Kraft während der Zeit h dieselbe geblieben, wie im Anfange von h, so wäre die Geschwindigkeit verändert um $\varphi . h$. Hätte die Kraft aber während der Zeit h mit derjenigen Stärke gewirkt, die sie am Ende der Zeit h erlangt hat, so wäre die Aenderung der Geschwindigkeit $(\varphi + \Delta\varphi)h$ gewesen. Nun kann h so klein genommen werden, daß zwischen t und t + h die Kraft φ fortwährend wächst oder abnimmt. Sie möge wachsen. Dann ist

$$\varphi h < \Delta v < (\varphi + \Delta\varphi) h,$$

$$\varphi h < \frac{dv}{dt} h + \frac{d^2v}{dt^2}\frac{h^2}{1.2} \ldots < \varphi h + \frac{d\varphi}{dt} h^2 \ldots$$

folglich $$\varphi < \frac{dv}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2}\frac{h}{1.2} \ldots < \varphi + \frac{d\varphi}{dt} h \ldots$$

Nimmt die Kraft dagegen von t bis t + h fortwährend ab, so ist

$$\varphi > \frac{dv}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2}\frac{h}{1.2} \ldots > \varphi + \frac{d\varphi}{dt} h \ldots$$

Beide Ungleichungen können für beliebig kleine Werthe von h nur dann Statt finden, wenn $\varphi = \frac{dv}{dt}$ ist. Nun war aber $v = \frac{dx}{dt}$ (56.), folglich $\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}$.

58. **Beispiele.** 1) Es sei $x = gt^2$. Man findet $\frac{dx}{dt} = 2gt = v$, und $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 2g$.

2) $x = ct \pm gt^2$; $\frac{dx}{dt} = v = c \pm 2gt$; $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \pm 2g$.

3) $x = \frac{k^2}{2g} \log \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2gt}{k}} + e^{-\frac{2gt}{k}} \right)$; $\frac{dx}{dt} = v = k \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - e^{-\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}} + e^{-\frac{2gt}{k}}}$;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 2g \left\{ 1 - \left\{ \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - e^{-\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}} + e^{-\frac{2gt}{k}}} \right\}^2 \right\} = 2g - 2g \frac{v^2}{k^2} = \varphi.$$

Nun ist aber für Körper, welche im widerstehenden Mittel fallen, $\varphi = 2g - 2g \frac{v^2}{k^2}$, wenn man den Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional setzt, und durch k eine Größe bezeichnet, deren Werth von der Beschaffenheit des fallenden Körpers und des widerstehenden Mittels abhängt. Folglich ist x der Fallraum und v die Geschwindigkeit für solche Körper.

Auch hier könnte man für Kräfte, die nach beliebigen Gesetzen wirken, die Gesetze der von ihnen erzeugten Bewegungen entdecken, wenn man in jedem Falle diejenige Function anzugeben im Stande wäre, von welcher eine gegebene die Ableitung ist. Eine solche Function, welche eine gegebene zur Ableitung hat, nennt man die ursprüngliche, oder Stammfunction, oder auch das Integral der gegebenen Function. Daher heißt der Inbegriff der Methoden, von jeder gegebenen und als Ableitung betrachteten Function das Integral zu finden, Integralrechnung.