7. Sekundärliteratur

Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen der Realschule I. Ordnung im Waisenhause zu Halle am ... in dem Versammlungssaale des neuen ...

Halle (Saale), 1838

Erster Abschnitt. Einfaches Leben.

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Erster Abschnitt.

Einfaches Leben.

Erstes Kapitel.

Theorie der Leibrenten.

Wir wollen im Folgenden unter einer Leibrente ein festbestimmtes Kapital verstehen, welches alljährlich postnumerando an eine bestimmte Person bis zu deren Tode von einer Versicherungsbank gezahlt wird. Wir fragen zunächst nach der Summe (Mise), welche eine in einem bestimmten Lebensalter stehende Person jetzt gleich und ein für allemal zu erlegen hat, um sich eine jährliche Leibrente von 1 Thaler zu erwerben. Ehe wir jedoch die Antwort auf diese Frage geben können, bedarf es noch einer Verständigung über den gegenwärtigen (baaren) Werth eines erst nach 1, 2, 3 oder mehreren Jahren zahlbaren Kapitals. Wenn ein Kapital, das heute eingezahlt wird, übers Jahr sich um die Zinsen von einem Jahre vermehrt, so hat selbstverständlich ein erst übers Jahr fälliges Kapital heute nicht denselben Werth, sondern einen geringeren. Zur Bestimmung dieses baaren Werthes eines erst nach einem Jahre zahlbaren Kapitals gelangen wir durch folgende einfache Betrachtung.

Nehmen wir den Zinsfuß von p% an, so sind 100 Thaler nach einem Jahre $100+p$ Thaler Werth. Fragen wir nun nach dem Werthe (x), den ein nach einem Jahre zahlbares Kapital (C) heute hat, so finden wir diesen durch das einfache Regeldetri-Exempel: $100+p$ Thaler sind 100 Thaler werth, wie viel sind C Thaler werth? Die Ausrechnung giebt

$$x = C\,\frac{100}{100+p}.$$

Wollen wir ferner wissen, welchen Werth ein solches Kapital 2 Jahre früher habe, so werden wir den Werth, den es ein Jahr früher hatte, noch einmal mit $\frac{100}{100+p}$ zu multipliciren haben. Der Betrag ist also

$$x\,\frac{100}{100+p} = C\,\frac{100}{100+p}\cdot\frac{100}{100+p}$$
$$= C\left(\frac{100}{100+p}\right)^2.$$

Ohne Weiteres dürfte nun klar sein, daß der baare Werth des nach 3, 4, 5, ... n Jahren zahlbaren Kapitales C bezüglich ausgedrückt wird durch die Werthe

$$C\left(\frac{100}{100+p}\right)^3,\ C\left(\frac{100}{100+p}\right)^4,\ C\left(\frac{100}{100+p}\right)^5,\ C\left(\frac{100}{100+p}\right)^n.$$

Die Factoren, womit im vorhergehenden C multiplicirt worden ist, werden **Discontirungsfactoren** genannt, und finden sich für 4% als Decimalbrüche in Tabelle II. unter der Colonne c aufgestellt.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen haben wir uns nun den Weg zu unserem eigentlichen Ziele gebahnt. Wir frugen nämlich nach der Summe, welche eine in einem bestimmten Lebensalter stehende Person jetzt gleich und zwar ein für allemal zu erlegen habe, um sich die Anwartschaft auf eine jährliche Leibrente von 1 Thaler zu erwerben. Zu dem Ende wollen wir, um zu einer allgemeinen Regel zu gelangen, die Anzahl der Personen, die nach unserer Sterblichkeitstabelle in dem Alter von n Jahren noch am Leben sind mit a_n bezeichnen. (Es wäre sonach z. B. für das zwanzigste Lebensjahr $a_n = a_{20} = 93268$.) Entsprechend sollen die Zahlen der 1, 2, 3, u. s. f. Jahre später noch Lebenden durch

$$a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3}\ \text{ꝛc.}$$

bezeichnet werden. Wir wollen nun weiter annehmen, daß sich die sämmtlichen a_n Personen die besagte Leibrente erwerben wollten, so würde nach abgeschlossener Versicherung die Leibrentenbank die Verpflichtung übernommen haben, zuerst an die am Schlusse des $n$ten Jahres noch lebenden a_{n+1} Personen je einen Thaler, dann an die am Schlusse des zweiten Jahres noch lebenden a_{n+2} Personen ebenfalls je einen Thaler, überhaupt an die von den sämmtlichen a_n Personen am Schlusse jedes folgenden Jahres noch Lebenden je einen Thaler zu bezahlen. Die Leistung der Bank bestünde demnach in Zahlung von

a_{n+1} Thalern nach 1 Jahre,
a_{n+2} " " 2 Jahren,
a_{n+3} " " 3 "
a_{n+4} " " 4 "
u. s. f.,

bis alle Versicherten mit Tode abgegangen sind. Aus dem Früheren ist nun klar, daß diese Zahlungen heute bezüglich die Werthe

$$a_{n+1} \cdot \frac{100}{100+p}; \quad a_{n+2} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^2; \quad a_{n+3} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^3; \text{ ꝛc.}$$

haben. Die Summe aller dieser Produkte wäre sonach der baare Werth der Gesammtleistung der Bank und es wäre also, wenn S diese Summe bezeichnet

$$S = a_{n+1} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right) + a_{n+2} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^2 + a_{n+3} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^3 + \text{ꝛc.}$$

Um die Ausrechnung dieser einzelnen Produkte bei den Versicherungen zu jedem anderen Lebensalter nicht aufs Neue ausführen zu müssen, wollen wir der Summe S noch eine etwas andere Form geben. Da ein Zahlenausdruck seinem Werthe nach ganz ungeändert bleibt, wenn man ihn mit einer und derselben Zahl multiplicirt und das Produkt durch dieselbe Zahl dividirt, so wird auch unser S sich nicht ändern, wenn wir alle Glieder mit $\left(\frac{100}{100+p}\right)^n$ multipliciren und das erlangte Resultat mit demselben Ausdrucke dividiren. Dadurch nimmt unser S nach den Regeln der Potenzrechnung die Form an

$$S = \frac{a_{n+1} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1} + a_{n+2} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+2} + a_{n+3} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+3} + \ldots}{\left(\frac{100}{100+p}\right)^n}.$$

Dieses S erkannten wir nun als die Gesammtleistung der Bank für sämmtliche a_n versicherte Personen, welche offenbar durch ein von letzteren baar zu erlegendes Kapital aufzuwiegen ist. Da die Zahl der Versicherten a_n ist, so kommt auf jede der $a_n$te Theil, so daß wir für eine Person von n Jahren als Leibrentenwerth oder sogenannte Mise der Leibrente à 1 Thlr., wenn wir letztere mit L_n bezeichnen, erhalten:

$$L_n = \frac{a_{n+1} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1} + a_{n+2} \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+2} + \ldots}{a_n \cdot \left(\frac{100}{100+p}\right)^n} \ldots (A).$$

Wir wollen im Folgenden das Produkt aus der Zahl der Lebenden in irgend einem Alter in den Discontirungsfactor, welcher diesem Alter entspricht, die discontirte Zahl der Lebenden nennen. Hiernach erhalten wir für die Berechnung des baaren Werthes einer Leibrente à 1 Thlr. für eine Person jedes Alters folgende einfache Regel:

1*

Der baare Werth einer Leibrente für eine Person irgend eines Alters ist gleich der Summe der discontirten Zahlen der Lebenden aller späteren Alter, dividirt durch die discontirte Zahl der Lebenden im gegenwärtigen Alter der versicherten Person.

Nach dieser Regel ist die Tabelle I. berechnet worden. Durch Multiplication der unter der Colonne (b) angegebenen Lebenden mit den unter (c) enthaltenen entsprechenden Discontirungsfactoren ist die Colonne (d) erhalten worden. Aus dieser ist durch successive Summirung von oben herab die Colonne (e) und durch Division mit (d) in (e) die Colonne (f), welche die baaren Werthe einer Leibrente à 1 Thlr. für jedes Alter enthält, gebildet worden.

Zweites Kapitel.

Versicherung eines Kapitals, zahlbar beim Tode einer Person. — Sterbekassen.

Will sich Jemand in der Weise versichern, daß bei seinem Tode seinen Erben von einem Lebensversicherungs-Institute ein Kapital ausgezahlt wird, so kann er diese Anwartschaft sich erwerben entweder durch einmalige Zahlung eines Kapitals oder durch Zahlung eines jährlichen Beitrags (Prämienzahlung) bis zum Tode. Wir wollen im Folgenden beide Versicherungsarten beleuchten.

I. Versicherung durch einmalige Zahlung eines Kapitals.

Dieses einmal zu zahlende Kapital muß offenbar gleich sein dem baaren Werthe der Leistung der Bank und haben wir deshalb diesen zu ermitteln. Nehmen wir bei voriger Bezeichnung an, daß sich a_n Personen im $n$ten Lebensjahre versicherten, so hat die Bank am Schlusse des ersten Versicherungsjahres, das Versicherungskapital à 1 Thlr. gerechnet, an die $(a_n - a_{n+1})$ im Laufe dieses Jahres gestorbenen Personen je einen Thaler, in Summa also $(a_n - a_{n+1})$ Thaler zu zahlen. Der baare Werth dieser ersten Bankzahlung ist nun nach dem Früheren, wenn wir den Discontirungsfactor

$$\frac{100}{100+p} = d$$

setzen, $(a_n - a_{n+1}) \cdot d$ Thaler. Ohne Weiteres leuchtet ein, daß die Bankleistungen am Ende des 2ten, 3ten, rc. Jahres der Reihe nach betragen werden

$$a_{n+1} - a_{n+2},\; a_{n+2} - a_{n+3},\; a_{n+3} - a_{n+4}$$

und ihre baaren Werthe

$$(a_{n+1} - a_{n+2})\, d^2,\; (a_{n+2} - a_{n+3})\, d^3,\; (a_{n+3} - a_{n+4})\, d^4, \text{ rc.},$$

so daß der baare Werth der Gesammtleistung der Bank für sämmtliche a_n Personen gleich der Summe

$$S = (a_n - a_{n+1})\, d + (a_{n+1} - a_{n+2})\, d^2 + (a_{n+2} - a_{n+3})\, d^3 + \ldots.$$

ist. Diesem Werthe von S können wir durch leichte Entwickelung eine andere Form geben. Wir erhalten nämlich, wenn wir mit den Potenzen von d aus multipliciren,

$$\begin{aligned} S &= [a_n d + a_{n+1} d^2 + a_{n+2} d^3 + \ldots] \\ &\quad - [a_{n+1} d + a_{n+2} d^2 + a_{n+3} d^3 + \ldots] \\ &= [a_n d + d\,(a_{n+1} d + a_{n+2} d^2 + \ldots)] \\ &\quad - [a_{n+1} d + a_{n+2} d^2 + \ldots] \\ &= a_n d - (1-d)\,[a_{n+1} d + a_{n+2} d^2 + \ldots]. \end{aligned}$$

Dies ist der baare Werth der Gesammtleistung der Bank für sämmtliche a_n Personen und es beträgt deshalb der baare Werth der Leistung einer Person, wenn wir denselben mit x bezeichnen,

$$\begin{aligned} x &= \frac{S}{a_n} \\ &= d - (1-d)\left\{\frac{a_{n+1} d + a_{n+2} d^2 + \ldots}{a_n}\right\}, \end{aligned}$$

oder wenn wir Zähler und Nenner in der großen Klammer mit d^n multipliciren,

$$x = d - (1-d)\left\{\frac{a_{n+1} d^{n+1} + a_{n+2} d^{n+2} + \ldots.}{a_n d^n}\right\}.$$

Wir überzeugen uns, daß die große Klammer in ihrer jetzigen Form ganz übereinstimmt mit dem Ausdruck (A) im vorigen Kapitel und also den baaren Werth einer Leibrente für eine $n$jährige Person ausdrückt. Wir können somit unser x auch kurz so schreiben:

$$x = d - (1-d)\, L_n.$$

Um dafür noch die für die Berechnung bequemste Form zu finden, setzen wir wieder den Werth

$$d = \frac{100}{100+p}$$

ein und erhalten

$$x = \frac{100}{100+p} - \left\{1 - \frac{100}{100+p}\right\} L_n$$

oder nach leichter Entwickelung

$$x = \frac{100 - p\ L_n}{100 + p} \dots (B).$$

Nach dieser Formel ist die Colonne (g) in Tabelle I. berechnet worden.

II. Versicherung durch jährliche Prämienzahlung.

Wenn die versicherte Person ein bei deren Tode zahlbares Kapital durch Zahlung einer sich gleichbleibenden jährlichen Prämie (P) erwerben will, so muß offenbar der baare Werth dieser Prämienzahlung dem vorher unter (B) aufgestelltem Werthe der Bankleistung gleich sein. Man übersieht leicht, daß die jährliche, praenumerando zu leistende, Prämienzahlung ganz gleichbedeutend ist mit einer praenumerando zu zahlenden oder sogenannten vorschußweisen Leibrente. Eine solche vorschußweise Leibrente à 1 Thlr. unterscheidet sich aber von der im Vorhergehenden betrachteten nachschußweisen nur einfach dadurch, daß zum baaren Werthe der letzteren nur noch eine einmalige Zahlung von 1 Thaler hinzukommt. Bei voriger Bezeichnung ist demnach der baare Werth einer nachschußreichen Rente

$$1 + L_n.$$

Beträgt nun der jährliche Prämiensatz P Thaler, so ist der baare Werth (y) der gesammten Prämienzahlung

$$y = P\,(1 + L_n) \dots (C).$$

Da nun (B) und (C) gleich sein müssen, so erhalten wir die Gleichung

$$P\,(1 + L_n) = \frac{100 - p\,L_n}{100 + p}$$

und somit

$$P = \frac{100 - p\,L_n}{100 + p} : (1 + L_n) \dots (D)$$

als Ausdruck für die jährlich zu zahlende Prämie für ein beim Tode zahlbares Kapital von 1 Thaler. Es leuchtet von selbst ein, daß bei einer Versicherungssumme von 100 Thalern diese jährliche Prämie mit 100 multiplicirt werden muß. Für eine solche Summe ist die Colonne (h) in Tabelle I. berechnet worden. Es ist nämlich jeder Werth unter Colonne (f) um 1 vermehrt, mit dem nun erhaltenen Werthe in den entsprechenden unter Colonne (g) dividirt und nachher der Quotient noch mit 100 multiplicirt worden. Die erhaltenen Resultate sind die unter Colonne (h) aufgestellten.

Drittes Kapitel.

Aussteuerversicherung.

Der Wunsch vieler Eltern, ihren Söhnen in einem bestimmten Lebensalter die Mittel zum Studieren oder zum Beginn eines bürgerlichen Geschäfts zu verschaffen oder ihren Töchtern zu einer Mitgift zu verhelfen, hat die sogenannte Aussteuerversicherung hervorgerufen. In neuerer Zeit sind solche Institute mehrfach entstanden und haben, nach der ungeheuren Betheiligung des Publikums zu schließen, den Beweis geliefert, wie sehr gerade Aussteuerversicherungs-Institute Bedürfniß sind. Leider kann aber auch nicht verhehlt werden, daß es unter den genannten Instituten nicht an solchen fehlt, die eine hinreichende Garantie ihres sicheren Bestehens nicht geben und es hat einige das Schicksal, das wir ihnen vorher gesagt haben, schon jetzt ereilt. Die Feststellung der theoretischen Grundlagen dieser Versicherungsart, die wir zuerst in der Schrift: „die höheren bürgerlichen Rechnungsarten" versucht haben, dürfte deshalb um so dringenderes Bedürfniß sein, als keine der über das Versicherungswesen handelnden Schriften, so viel wir wenigstens wissen, darüber handelt.

Wir wollen im Folgenden die vier Fälle unterscheiden:

1) Versicherung durch Zahlung in einer Summe ohne Rückgewähr;
2) Versicherung durch jährliche Prämienzahlung ohne Rückgewähr;
3) Versicherung durch Zahlung in einer Summe mit Rückgewähr;
4) Versicherung durch jährliche Prämienzahlung mit Rückgewähr.

I. Aussteuerversicherung durch Zahlung in einer Summe ohne Rückgewähr der letztern, wenn das Kind vor dem Versicherungstermine stirbt.

Wir nehmen an, daß Jemand ein Kind von k Jahren in der Weise und unter der Bedingung versichern wolle, daß demselben gegen eine jetzt gleich und nur einmal baar zu erlegende Summe (x) bei Erreichung des $n$ten Lebensjahres ein festgesetztes Kapital (C) ausgezahlt werde, daß aber die Einlage, falls das Kind vor Erreichung des $n$ten Jahres stürbe, dem Versicherungsinstitute verfallen sei. Um hier die Berechnungsformel für die Einlage (x) zu finden, haben wir hier wie früher die baaren Werthe der Leistungen der Bank sowohl als des Versicherungsuchenden zu ermitteln und einander gleich zu setzen. Da es offenbar ganz gleichgültig ist, in welches Jahr man diese baaren Werthe zurückversetzt, da zwei

Kapitale, die heute gleich sind, auch vor 10, 20, 30 ꝛc. Jahren dieselben baaren Werthe gehabt haben, so wollen wir diese baaren Werthe in das Geburtsjahr des Kindes versetzen.

Wenn bei früherer Bezeichnung im $k$ten Lebensjahre a_k Kinder versichert werden und jedes x Thaler zahlt, so ist der baare Werth der erlegten Summe bei der Geburt dieser gleichalterigen Kinder

$$a_k \cdot d^k \cdot x \ldots (E).$$

Wenn nun von diesen a_k Kindern a_n das $n$te Lebensjahr erreichen, so hat die Bank an jedes derselben C Thaler, in Summa also $a_n \cdot C$ Thaler zu zahlen, welche bei der Geburt der Kinder den baaren Werth

$$a_n \cdot d^n \cdot C \ldots (F)$$

haben. Da $E = F$ sein muß, so haben wir

$$a_k \cdot d^k \cdot x = a_n \cdot d^n \cdot C$$

und also

$$x = \frac{a_n \cdot d^n}{a_k \cdot d^k} \cdot C \ldots (G)$$

als Betrag der von einem Kinde im $k$ten Jahre zu zahlenden Einlage. Man hat also zur Berechnung die Regel:

> Man dividire die discontirte Zahl der Lebenden zur Zeit des Versicherungstermins durch die discontirte Zahl der Lebenden zur Zeit des Versicherungsabschlusses und multiplicire mit diesem Quotienten das Versicherungskapital.

Nach dieser Regel sind die Colonnen unter (f) in Tabelle II. berechnet worden. Die zu Grunde gelegte Sterblichkeitstabelle ist die sehr beachtenswerthe Tabelle für Frankreich von de Montferrand *); der Zinsfuß ist wieder 4% und als Versicherungsjahre sind das 18te, 21te und 24te angenommen worden. Die Werthe $a_n d^n$ und $a_k d^k$ sind aus der Colonne (d) genommen und die Quotienten mit $C = 100$ multiplicirt worden.

II. Die vorige Versicherung durch jährliche Prämienzahlung ohne Rückgewähr.

Bei dieser Versicherungsart bleibt die Leistung der Bank ganz dieselbe wie vorher, die Leistung (x) des zu versichernden Kindes wird jedoch hier durch jährliche Prämienzahlung bis zum $n$ten Lebensjahre, event. bei früherem Absterben bis zum Tode des Kindes gedeckt. Bleibt im Uebrigen Alles wie vorher, so zahlen die

*) s. Journal de l'école royale polytechnique. Tome XVI. p. 306.

die zuerst versicherten a_k Kinder à 1 Thlr. Prämie, folglich in Summa a_k Thaler, welche bei der Geburt den baaren Werth $a_k \cdot d^k$ haben. Entsprechend ist der baare Werth der von den im nächsten Jahre noch lebenden a_{k+1} Kindern gezahlten Prämien $a_{k+1} \cdot d^{k+1}$ u. s. f. Die letzte Prämienzahlung erfolgt bei erreichtem $(n-1)$ten Jahre oder (was dasselbe ist) beim Beginn des $n$ten, an dessen Schlusse das versicherte Kapital ausgezahlt wird. Wir haben somit als baaren Werth der gesammten Prämienzahlung à 1 Thlr.

$$a_k d^k + a_{k+1} d^{k+1} + a_{k+2} d^{k+2} + \ldots + a_{n-2} d^{n-2} + a_{n-1} d^{n-1},$$

und wenn wir die für jedes Kind zu zahlende Prämie mit P bezeichnen,

$$P\,(a_k d^k + a_{k+1} d^{k+1} + \ldots + a_{n-2} d^{n-2} + a_{n-1} d^{n-1}) \;\ldots\; (H).$$

Da dieser Ausdruck dem unter (F) gleich sein muß, so erhalten wir

$$P = \frac{a_n d^n \cdot C}{a_k d^k + a_{k+1} d^{k+1} + \ldots + a_{n-2} d^{n-2} + a_{n-1} d^{n-1}} \;\ldots\; (J)$$

und somit zur Berechnung der Jahresprämie die Regel:

> Man dividire die discontirte Zahl der Lebenden am Versicherungstermine durch die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden in allen früheren Jahren vom Jahre des Versicherungsabschlusses an gerechnet und multiplicire den Quotienten mit dem Versicherungskapitale.

Nach dieser Regel sind die Werthe unter der Colonne (g) in Tabelle II. berechnet; in Colonne (e) sind nämlich die Summen der discontirten Zahlen aufgestellt, mit diesen in die discontirte Zahl der Lebenden resp. im 24ten, 21ten und 18ten Lebensjahre dividirt und der Quotient mit 100 multiplicirt worden.

III. Versicherung durch Zahlung in einer Summe mit Rückgewähr der Einlage, wenn das Kind vor dem Versicherungstermine stirbt.

Wir wollen diese Versicherungsart so verstehen, daß die für ein Kind gezahlte Einlage im Falle des Ablebens desselben vor dem Versicherungstermine an letzterem den Angehörigen zurückerstattet wird. Wenn demnach a_k Kinder im Alter von k Jahren versichert werden, so beträgt die Rückgewährung à 1 Thlr.

$$(a_k - a_n) \text{ Thaler},$$

indem $(a_k - a_n)$ die Zahl der bis zum $n$ten Lebensjahre gestorbenen Kinder ist und eine gleiche Anzahl Thaler von der Bank zurückzuerstatten ist. Bezeichnen wir nun die frühere Einlage unter (G) mit x und die Mehrzahlung Behufs Erlangung der Rückgewähr mit z, so sind von der Bank für jedes todte Kind $(x+z)$ Thaler, also in Summa

$$(a_k - a_n)\ (x+z) \text{ Thaler} \ldots (K)$$

am Versicherungstermine zurück zu erstatten. Für diese Rückgewähr sind nun von sämmtlichen a_k Kindern beim Versicherungsabschlusse, also im $k$ten Lebensjahre, außer der gewöhnlichen Einlage (x) die oben erwähnten z Thaler, also in Summa $z \,.\, a_k$, zu zahlen, deren künftiger Werth, wenn die Bank keinen Schaden haben soll, dem Werthe unter (K) gleich sein muß. Ist B der baare Werth eines nach n Jahren zahlbaren Kapitals C, so ist, wie wir im ersten Kapitel gesehen haben,

$$B = C \,.\, \left(\frac{100}{100+p}\right)^n.$$

Hieraus folgt

$$C = B \,.\, \left(\frac{100+p}{100}\right)^n,$$

oder wenn wir $\frac{100+p}{100} = e$ setzen,

$$C = B \,.\, e^n;$$

d. h. um den künftigen Werth eines Kapitales zu finden, hat man den gegenwärtigen Werth desselben mit

$$\frac{100+p}{100} = e$$

zu multipliciren. Hieraus folgt ohne Weiteres, daß die obenerwähnte Extra-Einlage $z \,.\, a_k$ am Versicherungstermine den Werth

$$z \,.\, a_k \,.\, e^{n-k} \ldots (L)$$

hat, weil diese $z \,.\, a_k$ Thaler ($n-k$) Jahre in den Händen der Bank bleiben und von dieser genutzt werden. Setzen wir die Werthe unter (L) und (K) einander gleich, so erhalten wir

$$z \,.\, a_k \,.\, e^{n-k} = (a_k - a_n)\ (x+z)$$

und hieraus

$$z = \frac{(a_k - a_n)\ x}{a_k\, e^{n-k} - (a_k - a_n)}.$$

Bezeichnen wir nun die Gesammteinlage mit E, so ist

$$\begin{aligned} E &= z + x \\ &= \frac{(a_k - a_n)\ x}{a_k\, e^{n-k} - (a_k - a_n)} + x \\ &= \left\{\frac{(a_k - a_n)}{a_k\, e^{n-k} - (a_k - a_n)} + 1\right\} x \\ &= \frac{a_k\, e^{n-k}}{a_k\, e^{n-k} - (a_k - a_n)} \,.\, x. \end{aligned}$$

Nun hatten wir unter (G)

$$x = \frac{a_n\, d^n}{a_k\, d^k} = \frac{a_n\, d^{n-k}}{a_k},$$

oder weil $d = \frac{1}{e}$,

$$x = \frac{a_n}{a_k\, e^{n-k}}.$$

Setzen wir diesen Werth oben ein, so erhalten wir

$$E = \frac{a_k\, e^{n-k}}{a_k\, e^{n-k} - (a_k - a_n)} \cdot \frac{a_n}{a_k\, e^{n-k}}$$

oder

$$E = \frac{a_n}{a_k\, e^{n-k} - (a_k - a_n)} \ldots (M).$$

Nach dieser Formel sind die Gesammteinlagen in Tabelle III. berechnet. Die Art der Berechnung ist aus der Tabelle selbst vollkommen ersichtlich.

IV. Versicherung durch jährliche Prämienzahlung mit Rückgewähr der gesammten Prämien am Versicherungstermine, wenn das Kind vor demselben stirbt.

Wir haben zunächst die Summe zu ermitteln, welche das Versicherungsinstitut am Versicherungstermine zu restituiren hat. Nehmen wir zunächst an, daß die nach unserer Tabelle das 23te Lebensjahr erreichenden Kinder sich sämmtlich zu dieser Zeit, also bei Antritt des 24ten Jahres versicherten und daß davon A Kinder das 24te Lebensjahr nicht erreichten, so würden bei einer Prämie von 1 Thlr. Seitens der Versicherungsbank einfach A Thaler zurück zu erstatten sein. Fände ferner die Versicherung der Kinder unter denselben Umständen beim Antritt des 23ten Jahres Statt und stürben noch in diesem Jahre B Kinder, so würde der einfache Betrag von B Thalern und außerdem, weil im nächsten Jahre wieder A Kinder sterben und diese bereits zweimal gesteuert haben, $2A$ Thaler in Summa also $(2A + B)$ Thaler zu restituiren sein. Gehen wir noch ein Jahr weiter zurück und lassen die Kinder beim Eintritt des 22ten Jahres versichert werden, davon noch im Laufe des Jahres C Kinder sterben, so dürfte nun ohne Weiteres klar sein, daß die Gesammtrückgewähr Seitens der Bank jetzt in Summa $3A + 2B + C$ betragen würde, u. s. f.

Die Tabelle IV. enthält in Colonne (b) die in den einzelnen Jahren sterbenden Kinder also bei voriger Bezeichnung die Werthe von A, B, C, ꝛc. Die Colonne

(c) hingegen ist durch successive Addition von Colonne (b) enstanden, enthält also die Werthe

$$\begin{aligned}&A,\\&A+B,\\&A+B+C,\\&A+B+C+D,\\&A+B+C+D+E, \text{ ꝛc.},\end{aligned}$$

und endlich Colonne (d) die durch successive Addition der Colonne (c) entstandenen Werthe, also

$$\begin{aligned}&A,\\&2A+B,\\&3A+2B+C,\\&4A+3B+2C+D,\\&5A+4B+3C+2D+E,\\&\qquad\text{u. s. f.},\end{aligned}$$

durch welche die am Versicherungstermine zu restituirenden Summen bezeichnet werden. Analog sind die Colonnen (c′), (d′) und (c″), (d″) für's 21te resp. 18te Lebensjahr als Versicherungstermin construirt worden.

Bezeichnen wir nun die am Versicherungstermine für je einen Thaler Prämie Seitens der Bank zu leistenden Rückgewährungen mit R, die Hauptprämie (J) mit P und die Zusatzprämie zur Deckung der Rückgewähr mit Z, so hat die Bank als Gesammtrückgewähr

$$(P+Z)\,R \text{ Thaler}$$

zu leisten. Zur Bestimmung der Zusatzprämie Z führt nun folgende Betrachtung: Um $a_n \cdot 100$ Thaler (Gesammtbetrag der Versicherungssummen) aufzubringen, waren P Thaler jährliche Prämie nöthig, wie viel (Z) Thaler sind nöthig, um $(P+Z)\,R$ Thaler aufzubringen? Wir haben also die Proportion

$$P : Z = a_n \cdot 100 : (P+Z)\,R,$$

woraus wir erhalten

$$Z = \frac{P^2 R}{a_n \cdot 100 - PR} \;\ldots\; (N).$$

Um endlich die Gesammtprämie ($P + Z = G$) zu erhalten, haben wir zu Z noch P zu addiren und erhalten aus (N)

$$\begin{aligned}G &= P + Z\\ &= \frac{P^2 R}{a_n \cdot 100 - PR} + P\end{aligned}$$

$$G = \frac{P^2R + P \, . \, a_n \, . \, 100 - P^2R}{a_n \, . \, 100 - PR} \text{ oder}$$

$$G = \frac{P \, . \, a_n \, . \, 100}{a_n \, . \, 100 - PR} \; \ldots \; (O).$$

Nun hatten wir aber unter (J),

$$P = \frac{a_n \, . \, d^n \, . \, C}{a_k \, d^k + a_{k+1} \, d^{k+1} + \ldots \, a_{n-1} \, d^{n-1}},$$

welcher Ausdruck, wenn wir die Versicherungssumme $C = 100$ und die Summe der discontirten Zahlen der Lebenden [s. Tabelle II. unter (e)] $= \Sigma d$ setzen, übergeht in

$$P = \frac{a_n \, d^n \, . \, 100}{\Sigma d}.$$

Substituiren wir diesen Werth in (O), so erhalten wir

$$G = \frac{\frac{a_n \, d^n \, . \, 100}{\Sigma d} \, . \, a_n \, . \, 100}{a_n \, . \, 100 - \frac{a_n \, d^n \, . \, 100}{\Sigma d} \, . \, R}$$

oder nach gehöriger Reduction

$$G = \frac{a_n \, d^n \, . \, 100}{\Sigma d - R d^n} \; \ldots \; (P).$$

Nach dieser Formel sind die in Tabelle IV. in den Colonnen (o), (p), (q) aufgestellten Gesammtprämien einer Aussteuerversicherung mit Rückgewährung aller Prämien, falls das Kind vor dem Versicherungstermine stirbt, berechnet worden und zwar für das 24te, 21te und 18te Lebensjahr als Versicherungsjahr. Die Bildung der Colonnen (a), (b), (c), (d) wurde bereits vorher angegeben; die Colonnen (e), (f), (g) enthalten die baaren Werthe der in den Colonnen (d), (d′), (d″) aufgestellten Rückgewährungen bei der Geburt der Kinder oder bei früherer Bezeichnung die Werthe von $R d^n$. Die Colonnen (h), (i), (k) hingegen enthalten die Summen der discontirten Zahlen der lebenden Kinder oder die baaren Werthe der Prämienzahlung à 1 Thlr., entnommen aus den Colonnen unter (e) in Tabelle II. Die Colonnen (l), (m), (n) ferner enthalten die bezüglichen Differenzen $\Sigma d - R d^n$ und endlich die Colonnen unter (o), (p), (q) die Gesammtprämien, berechnet durch Division mit den letztgenannten Differenzen in die discontirte Zahl der am Versicherungstermine noch lebenden Kinder.