

7. Sekundärliteratur

**Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen
der Realschule I. Ordnung im Waisenhouse zu Halle am ...
in dem Versammlungssaale des neuen ...**

Halle (Saale), 1838

I. Beiträge zur analytischen Trigonometrie.

Nutzungsbedingungen

Die Digitalisate des Francke-Portals sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen für wissenschaftliche und private Zwecke heruntergeladen und ausgedruckt werden. Vorhandene Herkunftsbezeichnungen dürfen dabei nicht entfernt werden.

Eine kommerzielle oder institutionelle Nutzung oder Veröffentlichung dieser Inhalte ist ohne vorheriges schriftliches Einverständnis des Studienzentrums August Hermann Francke der Franckeschen Stiftungen nicht gestattet, das ggf. auf weitere Institutionen als Rechteinhaber verweist. Für die Veröffentlichung der Digitalisate können gemäß der Gebührenordnung der Franckeschen Stiftungen Entgelte erhoben werden.

Zur Erteilung einer Veröffentlichungsgenehmigung wenden Sie sich bitte an die Leiterin des Studienzentrums, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

Terms of use

All digital documents of the Francke-Portal are protected by copyright. They may be downloaded and printed only for non-commercial educational, research and private purposes. Attached provenance marks may not be removed.

Commercial or institutional use or publication of these digital documents in printed or digital form is not allowed without obtaining prior written permission by the Study Center August Hermann Francke of the Francke Foundations which can refer to other institutions as right holders. If digital documents are published, the Study Center is entitled to charge a fee in accordance with the scale of charges of the Francke Foundations.

For reproduction requests and permissions, please contact the head of the Study Center, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

I.

Beiträge zur analytischen Trigonometrie.

Die Trigonometrie, welche jetzt bei der Lösung fast jeder Aufgabe ein unentbehrliches Hülfsmittel ist, war früher höchst unvollständig; sie bildete sich als eine Tochter der Geodäsie und Astronomie zugleich mit der Vervollkommnung dieser Wissenschaften weiter aus.

Die Griechen nennen Hipparch (160—125 v. Ch.) als den Ersten, welcher 12 Bücher über die *Chorden* geschrieben, was offenbar eine Trigonometrie gewesen sein muss, da bekanntlich die Alten die Sehne des doppelten Winkels gebrauchten an Stelle des *Sinus*, den die Araber zuerst eingeführt haben. Der Erste, welcher die *Sinus* gebrauchte, war der Araber Mohamed al Batani (880); die meisten Verdienste aber hat Geber ben Aphla (1090), welcher schon die vier Hauptfälle der Trigonometrie unterscheidet. Aus der römischen Kaiserzeit sind noch Menelaus und sein Schüler Ptolemaeus (125—141) zu nennen. Von Letzterem ist noch eine *Chorden-Tafel* vorhanden, welche von 30' zu 30' geht und den Radius gleich 60 setzt, so dass in Sexagesimaltheilen des Radius ausgedrückt etwa die Sehne von 45° = 45.55.19 ist, d. h. = $\frac{45}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{19}{60^3} = 0.765366$ des Halbmessers.

Georg Purbach oder Burbach († 1461) theilte den Radius in 600000 Theile, und berechnete die *Sinus* der Winkel von 10' zu 10'.

Johann Mueller, gewöhnlich Johannes Regiomontanus genannt (von seinem Geburtsorte Königsberg in Franken, † 1476), berechnete zwei Sinustafeln, eine für den Radius 6000000 und eine für $r = 10000000$ von Minute zu Minute. Er fügte auch zuerst eine Tafel der Tangenten hinzu, welche er wegen ihres nützlichen Gebrauchs *tabulam foecundam* nannte; doch berechnete er sie nur von Grad zu Grad. Weiter ging darin Georg Joachim, gewöhnlich Rhaeticus genannt (geb. 1514 zu Feldkirch im alten Rhätien, † 1576). Er unternahm es, eine Tafel der Sinus, Tangenten und der von ihm zuerst eingeführten Secanten für $r = 10000000000$ von 10" zu 10" zu berechnen. Er starb jedoch über der Ausarbeitung, und erst sein Schüler Valentin Otho vollendete dieses Werk 1596, wo zugleich die Auseinandersetzung der Berechnungsart gegeben ist, welche, wie sich leicht denken lässt, mit den damals geringen Hilfsmitteln sehr unbequem und langweilig war. Einen hohen Grad von Vollkommenheit erlangte jedoch das Ganze, als Neper (John Napier, Baron von Merchiston in Schottland, geb. 1550) die Logarithmen erfand, welche er 1614 bekannt machte, und welche Henry Briggs (geb. 1560 zu Warleywod) für die Grundzahl 10 umarbeitete (1633). Aber auch diese Logarithmen sind damals nicht auf dem einfachen Wege gefunden, welchen man jetzt kennt, sondern mit beinahe undenkbarer Anstrengung und Ausdauer. Die sogenannte Analysis des Unendlichen hat viel leichtere und kürzere Wege gezeigt, indem man vermöge dieser jede trigonometrische Linie unabhängig von der andern durch besondere Formeln finden kann.

Der Zweck der Trigonometrie ist, aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks, worunter wenigstens eine Seite sein muss, weil durch die drei Winkel allein das Dreieck nicht bestimmt ist, die übrigen Stücke zu berechnen. Wenn wir aber dies thun wollen, so tritt uns sogleich das Hinderniss in den Weg, dass man Linien und Winkel, also zwei ganz verschiedenartige Grössen in der Rechnung hat, welche nicht mit einem gemeinsamen Masse gemessen werden können. Man musste also versuchen, die eine auf die andere zu reduciren, oder irgend ein anderes Ersatzmittel herbeizuschaffen.

Man bemerkte zunächst, dass die Sehnen im Kreise grösser wurden, wenn der Winkel wuchs, und ebenfalls mit diesem abnahmen; dasselbe geschah natürlich auch mit der halben Sehne. Man kam also auf den Gedanken, die Grösse des Winkels aus der Länge der dazu gehörigen halben

Sehne zu bestimmen und umgekehrt von der Grösse des Winkels auf die Länge der Chorde zu schliessen. Auf solche Weise entstanden die trigonometrischen Linien; doch sah man bald, dass die absolute Grösse dieser Linien nicht Ersatzmittel der Winkel sein konnte, da für verschiedene Radien zu demselben Winkel trigonometrische Linien von verschiedener Grösse gehörten, welche aber immer dasselbe Verhältniss zum zugehörigen Radius hatten; und so kam man auf die trigonometrischen Funktionen. Diese sind die unbekannten Verhältnisszahlen der trigonometrischen Linien zum Radius, welche also anzeigen, wie oft der Radius in diesen trigonometrischen Linien enthalten ist. Man muss daher streng die trigonometrischen Linien von den trigonometrischen Funktionen unterscheiden, was schriftlich am Bequemsten wohl dadurch geschieht, dass man beide zwar mit denselben Namen, jedoch erstere mit grossen und letztere mit kleinen Anfangsbuchstaben bezeichnet.

Die eigentliche Trigonometrie, sowohl die ebene als die sphärische, will ich hier übergehen, und mich nur mit der analytischen beschäftigen, deren Bedeutung aus der Erklärung der drei Theile, in welche sie zerfällt, am Besten klar wird. Diese Theile sind:

- 1) *Goniometrie*, welche sich mit der Vergleichung der Winkel mittelst der von ihnen abhängigen Funktionen und mit den Relationen dieser Funktionen selbst beschäftigt.
- 2) *Cyclometrie*, welches der Inbegriff der Formeln ist, welche die Relationen der Kreisbögen und ihrer zugehörigen trigonometrischen Funktionen angeben.
- 3) *Cyclotechnie*, welches die Anwendung der cyclometrischen Formeln auf die numerische Berechnung der zu den Kreisbögen gehörigen trigonometrischen Funktionen oder der Bögen aus den Funktionen ist.

Bevor ich zur Hauptaufgabe der Goniometrie schreite, — nämlich eine Potenz des sinus oder cosinus eines Winkels durch die sinus oder cosinus der Vielfachen desselben Winkels und umgekehrt den sinus oder cosinus eines Vielfachen durch die Potenzen der sinus oder cosinus des einfachen Winkels auszudrücken — will ich erst noch die Summen der Reihen der sinus und cosinus bestimmen, und setze deshalb zuerst

$$\sin x + \sin(x + y) + \sin(x + 2y) + \dots + \sin(x + ny) = X.$$

Zur Bestimmung von X mögen die folgenden Gleichungen, deren Richtigkeit sofort erhellt, dienen:

$$1 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin 2x + 3 \cdot \sin 3x + \dots + n \cdot \sin nx = X.$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \sin x \cdot \cos y &= \sin(x+y) + \sin(x-y) \\
2 \cdot \sin(x+y) \cdot \cos y &= \sin(x+2y) + \sin x \\
2 \cdot \sin(x+2y) \cdot \cos y &= \sin(x+3y) + \sin(x+y) \\
2 \cdot \sin(x+3y) \cdot \cos y &= \sin(x+4y) + \sin(x+2y) \\
&\vdots \\
2 \cdot \sin\{x+(n-1)y\} \cdot \cos y &= \sin(x+ny) + \sin\{x+(n-2)y\} \\
2 \cdot \sin(x+ny) \cdot \cos y &= \sin\{x+(n+1)y\} + \sin\{x+(n-1)y\}.
\end{aligned}$$

Durch Addition vorstehender Gleichungen erhält man leicht Folgendes:

$$2 \cdot X \cdot \cos y = X - \sin x + \sin\{x+(n+1)y\} + \sin(x-y) + X - \sin(x+ny)$$

oder

$$2 \cdot (1 - \cos y) X = \sin x - \sin(x-y) - [\sin\{x+(n+1)y\} - \sin(x+ny)],$$

welche Gleichung sich leicht unter Anwendung bekannter Formeln in folgende verwandeln lässt:

$$\begin{aligned}
4 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}y \cdot X &= 2 \cdot \cos(x - \frac{1}{2}y) \cdot \sin \frac{1}{2}y - 2 \cdot \cos\{x+(n+\frac{1}{2})y\} \cdot \sin \frac{1}{2}y \\
&= -2 \cdot \sin \frac{1}{2}y \cdot [\cos\{x+(n+\frac{1}{2})y\} - \cos(x - \frac{1}{2}y)] \\
&= 4 \cdot \sin \frac{1}{2}y \cdot \sin(x + \frac{1}{2}ny) \cdot \sin \frac{1}{2}(n+1)y.
\end{aligned}$$

$$\text{Daraus ergibt sich: } X = \frac{\sin(x + \frac{1}{2}ny) \cdot \sin \frac{1}{2}(n+1)y}{\sin \frac{1}{2}y}.$$

Setzen wir hier $ny = 90^\circ$, so wird

$$X = \frac{\sin(45^\circ + x) \cdot \sin\left(45^\circ + \frac{45^\circ}{n}\right)}{\sin \frac{45^\circ}{n}}.$$

Wenn $ny = 180^\circ$ ist, so erhalten wir

$$X = \cos x \cdot \cotg \frac{90^\circ}{n}.$$

Ist $n = \infty$, so gehen die Reihen ins Unendliche und man hat dann

$$2 \cdot X \cdot \cos y = X - \sin x + X + \sin(x-y),$$

also durch leichte Umformung

$$X = \frac{\cos(x - \frac{1}{2}y)}{2 \cdot \sin \frac{1}{2}y}.$$

Derselbe Weg, den wir soeben zur Bestimmung der Summe der sinus eingeschlagen haben, führt auch beim cosinus zu einem ähnlichen Resultate. Wir setzen desshalb:

$$\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \dots + \cos(x+ny) = Y.$$

Dann hat man dem Vorigen analog folgende Gleichungen:

$$2 \cdot \cos x \cdot \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$2 \cdot \cos(x+y) \cdot \cos y = \cos(x+2y) + \cos x$$

$$2 \cdot \cos(x+2y) \cdot \cos y = \cos(x+3y) + \cos(x+y)$$

$$2 \cdot \cos(x+3y) \cdot \cos y = \cos(x+4y) + \cos(x+2y)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$2 \cdot \cos\{x + (n-1)y\} \cdot \cos y = \cos(x+ny) + \cos\{x + (n-2)y\}$$

$$2 \cdot \cos(x+ny) \cdot \cos y = \cos\{x + (n+1)y\} + \cos\{x + (n-1)y\};$$

diese Gleichungen addirt geben folgendes Resultat:

$$2 \cdot \cos y \cdot Y = Y - \cos x + \cos\{x + (n+1)y\} + \cos(x-y) + Y - \cos(x+ny)$$

oder

$$2 \cdot (1 - \cos y) \cdot Y = \cos x - \cos(x-y) - [\cos\{x + (n+1)y\} - \cos(x+ny)].$$

Diese Gleichung reducirt sich eben so leicht, wie vorhin, auf folgende:

$$4 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}y \cdot Y = -2 \cdot \sin(x - \frac{1}{2}y) \cdot \sin \frac{1}{2}y + 2 \cdot \sin\{x + (n + \frac{1}{2})y\} \cdot \sin \frac{1}{2}y$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{1}{2}y \cdot [\sin\{x + (n + \frac{1}{2})y\} - \sin(x - \frac{1}{2}y)]$$

$$= 4 \cdot \sin \frac{1}{2}y \cdot \cos(x + \frac{1}{2}ny) \cdot \sin \frac{1}{2}(n+1)y.$$

Daraus ergibt sich:

$$Y = \frac{\cos(x + \frac{1}{2}ny) \cdot \sin \frac{1}{2}(n+1)y}{\sin \frac{1}{2}y}.$$

Setzen wir hier $ny = 90^\circ$, so ist

$$Y = \frac{\cos(45^\circ + x) \cdot \sin \frac{n+1}{n} 45^\circ}{\sin \frac{45^\circ}{n}}.$$

Wenn $ny = 180^\circ$ ist, so erhalten wir

$$Y = -\sin x \cdot \cotg \frac{1}{2}y = -\sin x \cdot \cotg \frac{90^\circ}{n}.$$

Ist $n = \infty$, so gehen auch hier die Reihen ins Unendliche, und man hat dann

$$2 \cdot Y \cdot \cos y = Y - \cos x + Y + \cos(x-y),$$

also durch leichte Umformung

$$Y = -\frac{\sin(x - \frac{1}{2}y)}{2 \cdot \sin \frac{1}{2}y}.$$

Setzt man in der sinus- und cosinus-Reihe $x = 0$, so erhält man sofort:

$$\sin y + \sin 2y + \sin 3y + \dots + \sin ny = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)y \cdot \sin \frac{1}{2}ny}{\sin \frac{1}{2}y} \text{ und}$$

$$\cos y + \cos 2y + \cos 3y + \dots + \cos ny = \frac{\cos \frac{1}{2}(n+1)y \cdot \sin \frac{1}{2}ny}{\sin \frac{1}{2}y}.$$

Ist nun hier $n = 90$ und $y = 1^\circ$, so ergeben sich unter Anwendung der Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ nach einigen Reductionen folgende Gleichungen:

$$\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 90^\circ = \frac{1}{2}(\cotg 30' + 1) \text{ und}$$

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 90^\circ = \frac{1}{2}(\cotg 30' - 1),$$

welche sofort, da $\sin 90^\circ = 1$ und $\cos 90^\circ = 0$ ist, auf die identische Gleichung $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 89^\circ = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 89^\circ$ führen, deren Richtigkeit aus der Formel $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ ausserdem erhellt. Setzt man endlich in der vorhin gefundenen Gleichung

$$\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \dots + \cos(x+ny) = \frac{\cos(x + \frac{1}{2}ny) \cdot \sin \frac{1}{2}(n+1)y}{\sin \frac{1}{2}y} = Y$$

$y = 2x$, so wird

$$Y = \frac{\sin(n+1)2x}{2 \cdot \sin x}, \text{ oder wenn } n = n-1 \text{ ist,}$$

$$Y = \frac{\sin 2nx}{2 \cdot \sin x}.$$

Für den speciellen Werth $x = \frac{\pi}{2n+1}$ ergibt sich

$$Y = \frac{\sin\left(2n \cdot \frac{\pi}{2n+1}\right)}{2 \cdot \sin \frac{\pi}{2n+1}} = + \frac{1}{2},$$

was nach wenigen Umformungen leicht folgt, da $\frac{2n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1}$ ist.

Ebenso erhält man, wenn $x = \frac{\pi}{2n-1}$ ist,

$$Y = \frac{\sin\left(2n \cdot \frac{\pi}{2n-1}\right)}{2 \cdot \sin \frac{\pi}{2n-1}} = - \frac{1}{2},$$

da $\frac{2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1}$ gesetzt werden kann. Dann ergeben sich aber leicht die folgenden Gleichungen:

$$\cos \frac{\pi}{2n+1} + \cos \frac{3\pi}{2n+1} + \cos \frac{5\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = +\frac{1}{2} \text{ und}$$

$$\cos \frac{\pi}{2n-1} + \cos \frac{3\pi}{2n-1} + \cos \frac{5\pi}{2n-1} + \dots + \cos \frac{(2n-3)\pi}{2n-1} + \cos \pi = -\frac{1}{2},$$

oder anstatt der letzteren

$$\cos \frac{\pi}{2n-1} + \cos \frac{3\pi}{2n-1} + \cos \frac{5\pi}{2n-1} + \dots + \cos \frac{(2n-3)\pi}{2n-1} = +\frac{1}{2}.$$

Wir kommen jetzt zur Hauptaufgabe der *Goniometrie*, wie sie schon oben angegeben worden ist; doch will ich vorher noch das hinzufügen, was dabei gebraucht wird.

1) Das *Moivre'sche Theorem* $(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$, gültig für jedes n , kann ich als bekannt voraussetzen.

2) $1^n = \cos \frac{2m\pi}{n} \pm i \sin \frac{2m\pi}{n};$

denn es sei allgemein $1^n = a + bi$, so kann das bekanntlich immer unter folgender Form geschrieben werden:

$$1^n = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

wo r und α reelle Grössen sind. Dann ist aber

$$1 = r^n(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n, \text{ also nach (1) } \dots 1 = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Dieser Gleichung wird dadurch Genüge geschehen, wenn $r=1$, $\cos n\alpha=1$ und $\sin n\alpha=0$ ist. Dann ergibt sich aber sofort $n\alpha = \pm 2m\pi$ und also

$$\alpha = \pm \frac{2m\pi}{n}, \text{ welcher Werth zur Richtigkeit obiger Gleichung erforderlich ist.}$$

3) Man hat bekanntlich

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ für } n = \infty.$$

Ferner ist $\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$

$$\cos n\alpha - i \sin n\alpha = (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n, \text{ also}$$

$$\cos n\alpha = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n}{2} \text{ und}$$

$$\sin n\alpha = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n - (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n}{2i}.$$

Setzen wir hier $\alpha = \frac{z}{n}$ und $n = \infty$, so erhalten wir mit Benutzung des soeben angegebenen Werthes von e^x

$$\frac{\left(1 + \frac{iz}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{iz}{n}\right)^n}{2i} = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

und ebenso

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Um nun zunächst die m^{te} Potenz von $\cos x$ und $\sin x$ durch die cosinusse der Vielfachen von x auszudrücken, schlägt Euler folgenden Weg ein. Er setzt

$$\cos x + i \sin x = y \text{ und } \cos x - i \sin x = z;$$

dann erhält man durch Addition $y + z = 2 \cdot \cos x$

und durch Multiplication $y \cdot z = 1$.

Nun ist nach dem binomischen Lehrsatz, wenn man

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \text{ setzt,}$$

$$(y+z)^m = \sum C_m^k y^{m-k} \cdot z^k \text{ oder, da } (yz)^k = 1 \text{ ist,}$$

$$= \sum C_m^k y^{m-2k}.$$

Ferner ist nach dem Moivre'schen Satze

$$y^{m-2k} = \cos(m-2k)x + i \sin(m-2k)x, \text{ also dann}$$

$$(2 \cdot \cos x)^m = \sum C_m^k \{ \cos(m-2k)x + i \sin(m-2k)x \}$$

$$= \sum C_m^k \cos(m-2k)x + i \sum C_m^k \sin(m-2k)x$$

$$= X + iY,$$

$$\text{wo } X = \cos mx + m \cdot \cos(m-2)x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \cos(m-4)x + \dots$$

$$Y = \sin mx + m \cdot \sin(m-2)x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \sin(m-4)x + \dots$$

$$\text{Es ist aber auch } (z+y)^m = \sum C_m^k z^{m-k} \cdot y^k = \sum C_m^k z^{m-2k}$$

und da $z^{m-2k} = \cos(m-2k)x - i \sin(m-2k)x$ ist, so erhält man

$$(2 \cdot \cos x)^m = \sum C_m^k \cos(m-2k)x - i \sum C_m^k \sin(m-2k)x$$

$$= X - iY.$$

Weil nun $(2 \cdot \cos x)^m = X + iY$ und auch $(2 \cdot \cos x)^m = X - iY$ ist, so muss $(2 \cdot \cos x)^m = X$ und $0 = Y$ sein, also die Werthe für X und Y eingesetzt

$$(2 \cdot \cos x)^m = \cos mx + m \cdot \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \cos(m-4)x + \dots$$

$$0 = \sin mx + m \cdot \sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \sin(m-4)x + \dots$$

Davon, dass $Y=0$ sei, wenn m eine *positive ganze Zahl* ist, kann man sich leicht überzeugen. Y hat dann $m+1$ Glieder; unter diesen ist das

$$(p+1)^{\text{te}} \text{ Glied vom Anfange} = C_m^p \sin(m-2p)x$$

$$\text{und das } (p+1)^{\text{te}} \text{ Glied vom Ende} = C_m^{m-p} \sin\{m-2(m-p)\}x$$

$$= C_m^{m-p} \sin\{-(m-2p)\}x$$

$$= -C_m^{m-p} \sin(m-2p)x,$$

also beide zusammen $= 0$, weil bekanntlich $C_m^p = C_m^{m-p}$ ist.

Es heben sich also alle Glieder vom Anfange gegen die vom Ende auf, und das mittelste, welches in dem Falle übrig bleibt, wenn m *gerade* ist, also das $(\frac{1}{2}m+1)^{\text{te}}$ ist

$$C_m^{\frac{1}{2}m} \sin(m-2 \cdot \frac{1}{2}m)x = C_m^{\frac{1}{2}m} \sin 0x = 0.$$

Es ist also in diesem Falle, wenn m eine *positive ganze Zahl* ist, immer $Y=0$.

Allein aus diesem Gange des Beweises ist die allgemeine Gültigkeit des Satzes nur ersichtlich, so lange m eine *positive ganze Zahl* ist; ob er auch gelte, wenn m ein *Bruch* ist, folgt nicht unmittelbar. Deshalb schlug Lagrange in seinen *Leçons sur le calcul des fonctions*, *Leçon XI.* folgenden Weg des Beweises ein.

Er setzt $y = (\cos x)^m$ und differentiirt diese Gleichung,

$$\frac{dy}{dx} = -m \cdot (\cos x)^{m-1} \cdot \sin x.$$

Aus beiden $(\cos x)^{m-1}$ eliminirt, giebt

$$m \cdot y \cdot \sin x + \cos x \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Nun kommt es darauf an, für y eine Reihe von passender Form mit unbestimmten Coëfficienten anzunehmen, und dann letztere so zu bestimmen, dass diese Reihe statt y gesetzt der genannten Differentialgleichung genüge. Enthält dann diese Reihe noch eine unbestimmte Constante, so ist sie als das vollständige Integral anzusehen, so dass die Constante nur noch zweckmässig

bestimmt werden muss, um das besondere Integral $(\cos x)^m$, welches das vollständige umfassen muss, zu liefern.

Lagrange setzt daher

$$y = A \cdot \cos nx + B \cdot \cos(n-1)x + C \cdot \cos(n-2)x + \dots$$

wo n, A, B, C etc. noch zu bestimmende Grössen sind.

Differentiirt giebt die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\{n \cdot A \cdot \sin nx + (n-1) \cdot B \cdot \sin(n-1)x + (n-2) \cdot C \cdot \sin(n-2)x + \dots\}.$$

Diese beiden Ausdrücke von y und $\frac{dy}{dx}$, in die obige Differentialgleichung eingesetzt, geben

$$m \cdot \sin x \cdot \{A \cdot \cos nx + B \cdot \cos(n-1)x + C \cdot \cos(n-2)x + \dots\} - \cos x \cdot \{n \cdot A \cdot \sin nx + (n-1) \cdot B \cdot \sin(n-1)x + (n-2) \cdot C \cdot \sin(n-2)x + \dots\} = 0,$$

oder mit Anwendung der Formel $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

$$\left. \begin{aligned} &\{m \cdot A - n \cdot A\} \cdot \sin(n+1)x \\ &+ \{m \cdot B - (n-1) \cdot B\} \cdot \sin nx \\ &+ \{m \cdot C - (n-2) \cdot C - m \cdot A - n \cdot A\} \cdot \sin(n-1)x \\ &+ \{m \cdot D - (n-3) \cdot D - m \cdot B - (n-1) \cdot B\} \cdot \sin(n-2)x \\ &+ \{m \cdot E - (n-4) \cdot E - m \cdot C - (n-2) \cdot C\} \cdot \sin(n-3)x \\ &+ \quad \quad \quad \text{etc.} \quad \quad \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Alle Werthe von n, A, B, C, D etc., welche dieser Gleichung genügen, entsprechen auch der obigen Differentialgleichung, erfüllen also vollkommen die Forderung.

Lagrange setzt also

$$\begin{aligned} (m-n) \cdot A &= 0 \\ (m-n+1) \cdot B &= 0 \\ (m-n+2) \cdot C - (m+n) \cdot A &= 0 \\ (m-n+3) \cdot D - (m+n-1) \cdot B &= 0 \\ (m-n+4) \cdot E - (m+n-2) \cdot C &= 0 \\ \text{etc.} \quad \quad \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

und diesen Gleichungen genügt er wieder, indem er $m = n$ setzt, und dadurch dann B, C, D etc. durch A ausdrückt, während A unbestimmt bleibt,

mithin als die willkürliche Constante der Integration angesehen werden muss, welche auf anderem Wege zu bestimmen ist.

Dadurch erhält man

$$y = A \cdot \{\cos mx + C_m^1 \cdot \cos(m-2)x + C_m^2 \cdot \cos(m-4)x + \dots\}.$$

Um die Constante A zu bestimmen, setzt L. $x = 0$, wo dann $y = 1$ werden muss, und erhält also

$$1 = A \cdot \{1 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \dots\} = A \cdot \{1 + 1\}^m,$$

mithin $A = \frac{1}{2^m}.$

Also erhält auch Lagrange auf diesem Wege dasselbe Resultat, welches Euler hatte, nämlich

$$(2 \cdot \cos x)^m = X \\ 0 = Y,$$

wobei er ausdrücklich bemerkt, dass diese Entwicklung allgemein für jeden Exponenten m gelte.

Poisson (*Correspondence sur l'Ecole polytechnique* 1811, p. 213) bemerkte, dass diese dem Anscheine nach so streng erwiesene Gleichung

$$(2 \cdot \cos x)^m = X$$

$$= \cos mx + C_m^1 \cdot \cos(m-2)x + C_m^2 \cdot \cos(m-4)x + \dots$$

nicht gilt, wenn $x = \pi$ und $m = \frac{1}{3}$ gesetzt wird; denn man hat alsdann

$$\cos(m-2k)x = \cos(m\pi - 2k\pi) = \cos m\pi$$

und

$$\cos x = \cos \pi = -1.$$

Die obige Gleichung würde demnach folgendes Resultat geben

$$(-2)^{\frac{1}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} \{1 + C_{\frac{1}{3}}^1 + C_{\frac{1}{3}}^2 + C_{\frac{1}{3}}^3 + \dots\}$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} \{1 + 1\}^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

oder $(-1)^{\frac{1}{3}} = \cos \frac{\pi}{3}$; das würde aber nach dem oben bewiesenen zweiten

Hilfssatz auf die offenbar unwahre Gleichung führen

$$\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3}.$$

Auch anderweitig lässt sich leicht nachweisen, dass die Gleichung

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \cos \frac{\pi}{3}$$

nicht richtig sein kann, da ja bekanntlich $\cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ist.

Dies gab Veranlassung zu wiederholten Versuchen, die allgemeine Gültigkeit oder Ungültigkeit der Gleichungen

$$(2 \cdot \cos x)^m = X \text{ und } 0 = Y \text{ nachzuweisen.}$$

Lacroix bemerkt, dass auf demselben Wege, auf welchem Lagrange seiner Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + m \cdot y \cdot \tan x = 0$$

durch dieses allgemeine Integral $y = A \cdot X$ genüge, ihr auch durch $y = B \cdot Y$, folglich auch durch $y = A \cdot X + B \cdot Y$ genügt werde, dass aber dann der merkwürdige Umstand eintrete, dass, obgleich die Differentialgleichung nur von der ersten Ordnung wäre, doch ein Integral mit zwei willkürlichen Constanten ihr genüge, was gegen die Principien der Integralrechnung ist. Es muss also eine durch die Natur der Sache begründete Abhängigkeit der beiden Constanten A und B stattfinden, so dass nur eine von beiden als willkürlich angesehen werden kann. In der That scheint sich dies auch zu bestätigen, wenn man bemerkt, dass sowohl $y = X$ als auch $y = Y$ der Differentialgleichung genügen, dass man daher zu gleicher Zeit hat:

$$\frac{dX}{dx} + m \cdot X \cdot \tan x = 0$$

$$\text{und } \frac{dY}{dx} + m \cdot Y \cdot \tan x = 0,$$

woraus man durch Elimination von $\tan x$ erhält:

$$X \cdot dY - Y \cdot dX = 0 \text{ oder } \frac{dX}{X} = \frac{dY}{Y},$$

welches integrirt giebt:

$$Y = C \cdot X \text{ oder } X = D \cdot Y,$$

so dass dadurch das Integral $y = A \cdot X + B \cdot Y$ übergeht in

$$y = (A + B \cdot C) \cdot X \text{ oder in } y = (A \cdot D + B) \cdot Y,$$

d. h.

$$y = E \cdot X \text{ oder } y = F \cdot Y,$$

wo die Constanten E und F noch bestimmt werden müssen.

Für $x = 0$ also $y = 1$ erhält man aber $E = \frac{1}{2^m}$, $F = \frac{1}{0}$, wesshalb das zweite Integral als hier unbrauchbar verworfen, das erste aber beibehalten werden muss. Dieses liefert aber, und zwar für jeden Werth von m :

$$(2 \cdot \cos x)^m = X \text{ und } 0 = Y,$$

was auch Euler und Lagrange gefunden haben.

Da also diese Gleichungen für $x = \pi$ und $m = \frac{1}{2}$ nicht richtig sind, so glaubte man dieses als einzelne Ausnahme betrachten zu müssen, ebenso wie ja auch der Taylor'sche Lehrsatz im Allgemeinen richtig und doch in speciellen Fällen nicht anwendbar ist; allein der Taylor'sche Lehrsatz giebt eigentlich nie ein unrichtiges, sondern bisweilen nur ein eben unbrauchbares Resultat; hier aber sehen wir geradezu etwas Falsches. Daher muss dieser Satz auch im Allgemeinen unrichtig sein, und in der That setzt man $\pi + x$ statt x , so müsste Y doch immer gleich 0 sein; dann wird aber

$$\sin \{(m - 2k)(\pi + x)\} = \sin \{m\pi + (m - 2k)x\} \\ = \sin m\pi \cdot \cos (m - 2k)x + \cos m\pi \cdot \sin (m - 2k)x$$

und es würde Y also übergehen in

$$\sin m\pi \cdot \Sigma C_m^k \cdot \cos (m - 2k)x + \cos m\pi \cdot \Sigma C_m^k \cdot \sin (m - 2k)x,$$

d. h. in

$$X \cdot \sin m\pi + Y \cdot \cos m\pi,$$

und weil nach der Annahme $Y = 0$ ist und $X = (2 \cdot \cos x)^m$ in $\sin m\pi \cdot (2 \cdot \cos x)^m$, so dass dann auch noch für jeden Werth von x und m sein müsste

$$\sin m\pi \cdot (2 \cdot \cos x)^m = 0,$$

welche Gleichung offenbar nur dann für jeden Werth von x richtig ist, so lange m eine ganze Zahl ist.

Es muss also in allen vorhergehenden Beweisen an irgend einer Stelle ein Fehler, ein falscher Schluss gemacht sein, welcher dann natürlich das falsche Resultat zur Folge gehabt hat.

Wir wollen diese Fehler jetzt aufsuchen und verbessern:

$$\text{Euler hatte} \quad (2 \cdot \cos x)^m = X + iY$$

$$(2 \cdot \cos x)^m = X - iY$$

und folgerte daraus durch Addition $2 \cdot (2 \cdot \cos x)^m = 2 \cdot X$;

das ist aber nicht erlaubt, sondern man darf nur schliessen:

$$(2 \cdot \cos x)^m + (2 \cdot \cos x)^m = 2 \cdot X,$$

weil man nicht weiss, ob $(2 \cdot \cos x)^m$ in beiden Fällen denselben Werth habe, da es ja doch im Allgemeinen unendlich viele Werthe hat.

Etwas Aehnliches zeigt sich bei den beiden Werthen einer quadratischen Gleichung. Aus $x^2 - 2ax + b = 0$ erhält man die beiden Wurzeln

$$x = a + \sqrt{a^2 - b}$$

$$x = a - \sqrt{a^2 - b}.$$

Wollte man hieraus ableiten $2x = 2a$ oder $x = a$, so ist das falsch; während es wohl erlaubt ist zu sagen $x + x = 2a$ unter der Bedeutung: die Summe

beider Werthe von x ist $2a$, die beiden Werthe von x aber haben verschiedenen Sinn.

Der obige Schluss ist aber nur richtig, wenn m eine positive ganze Zahl ist. Er bliebe wohl auch noch für ein negatives ganzes m richtig, wenn nur die Reihen X und Y zugleich einen Werth hätten, d. h. wenn sie convergirten.

Was ferner die indirecte Methode des Lagrange anbetrifft, so ist sie jederzeit gefahrlos; denn man kann niemals sicher sein, ob die gewählte Form die allgemein gültige ist. Wenn auch die Coefficienten-Bestimmung ein Resultat giebt, so darf dieses noch nicht die allgemeine Gültigkeit der Form verbürgen, weil, wenn die Reihe auch nur einem einzigen speciellen Falle genügt, die Coefficienten Werthe darbieten müssen.

Der einfachste und directeste Weg, welcher zugleich das vollständige und allgemeine Resultat giebt, scheint folgender zu sein:

Wir erhalten aus dem oben bewiesenen dritten Hülfsatz allgemein

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} \text{ und } \cos x - i \sin x = e^{-ix},$$

woraus, da $\cos x$ und $i \sin x$ nur einen einzigen Werth haben, folgt:

$$2 \cdot \cos x = e^{ix} + e^{-ix} \text{ und } 2 \cdot i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}, \text{ also}$$

$$(2 \cdot \cos x)^m = \sum C_m^k (e^{ix})^{m-k} \cdot (e^{-ix})^k \\ = \sum C_m^k \cdot (e^{ix})^{m-2k}.$$

Es war aber $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, also unter Anwendung des Moivre'schen Satzes

$$(e^{ix})^{m-2k} = \cos(m-2k)x + i \sin(m-2k)x$$

und da alle Werthe der vorletzten Gleichung erhalten werden, wenn man rechts $\pm 2n\pi + x$ statt x schreibt, so muss man das auch hier thun, und erhält also:

$$(e^{ix})^{m-2k} = \cos\{(m-2k) \cdot (\pm 2n\pi + x)\} + i \sin\{(m-2k) \cdot (\pm 2n\pi + x)\} \\ = \cos\{\pm 2mn\pi + (m-2k)x\} + i \sin\{\pm 2mn\pi + (m-2k)x\}.$$

Daraus ergiebt sich dann der Werth von

$$(2 \cdot \cos x)^m = \sum C_m^k \cos\{\pm 2mn\pi + (m-2k)x\} + i \sum C_m^k \sin\{\pm 2mn\pi + (m-2k)x\},$$

oder indem man cosinus und sinus der Summe auflöst

$$(2 \cdot \cos x)^m = X \cdot \cos(\pm 2mn\pi) - Y \cdot \sin(\pm 2mn\pi) + i \{X \cdot \sin(\pm 2mn\pi) + Y \cdot \cos(\pm 2mn\pi)\},$$

wo n sowohl 0 als alle möglichen ganzen Zahlen bedeutet.

Man sieht leicht, wie diese Formel in die frühere

$$(2 \cdot \cos x)^m = X$$

übergeht, sobald m eine positive ganze Zahl ist, weil dann $Y = 0$ wird. Oder, wie es besser scheint, man sucht erst irgend einen Werth von $(2 \cdot \cos x)^m$ und multiplicirt dann diesen mit

$$1^m = \cos(\pm 2mn\pi) + i \sin(\pm 2mn\pi).$$

Wir hatten $2 \cdot \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$

$$(2 \cdot \cos x)^m = \sum C_m^k \cdot e^{(m-2k)ix}$$

$$e^{(m-2k)ix} = \cos(m-2k)x + i \sin(m-2k)x$$

$$(2 \cdot \cos x)^m = X + iY.$$

Das ist also nur ein specieller Werth; wir erhalten alle nur möglichen, wenn wir die vorhin angedeutete Multiplication mit 1^m ausführen, das giebt dann wie oben

$$(2 \cdot \cos x)^m = X \cos(\pm 2mn\pi) - Y \sin(\pm 2mn\pi) + i \{ X \sin(\pm 2mn\pi) + Y \cos(\pm 2mn\pi) \}.$$

Diese Gleichung bietet also die einzige allgemein gültige Form der Entwicklung von $(2 \cdot \cos x)^m$ nach den cosinus und sinus der Vielfachen dar.

Wir müssen jetzt noch untersuchen, in welchen Fällen die Reihen X und Y convergiren.

Da man weiss, dass die Summe der Glieder einer unendlichen Reihe nicht immer ein endliches Resultat giebt, wenn auch die Glieder der Reihe beständig abnehmen, wie z. B.

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

welche für $x = 1$ giebt

$$-\log 0 = \infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

so muss man also nur die Reihen convergent nennen, in welchen die Summen von beliebigen Gliedern sich einer beständigen Grenze nähern, niemals aber unendlich werden. Es muss einen Werth geben, welchen die Reihe nicht übersteigt, oder zwei Werthe, zwischen welchen die Reihe liegt. Hierdurch wird die Untersuchung über die Convergenz der Reihen in den meisten Fällen eine höchst delikate; es mag daher nicht unnütz sein, wenn hier Etwas über diesen Gegenstand hinzugefügt wird.

Zuerst sei folgende Reihe zu untersuchen:

$$\begin{aligned}
& 1 + m + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{m(m+1) \dots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \\
&= 1 + m + \frac{m}{2}(m+1) + \frac{m}{3}(m+1)\left(1 + \frac{m}{2}\right) + \frac{m}{4}(1+m)\left(1 + \frac{m}{2}\right)\left(1 + \frac{m}{3}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{m}{n}(1+m)\left(1 + \frac{m}{2}\right)\left(1 + \frac{m}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{m}{n-1}\right) \\
&= (1+m)\left(1 + \frac{m}{2}\right)\left(1 + \frac{m}{3}\right)\left(1 + \frac{m}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{m}{n}\right) \\
&= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4) \dots (m+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}.
\end{aligned}$$

Für ein negatives m erhält man

$$\begin{aligned}
& 1 - m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \\
&= (-1)^n \cdot \frac{(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = (-1)^n \cdot C_{m-1}^n.
\end{aligned}$$

Schreibt man den Binominal-Coëfficienten auf folgende Weise:

$$\frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \cdot \frac{m-4}{4} \dots \frac{m-n}{n},$$

so sieht man leicht

1) für $m = 0$ wird er $= \pm 1$.

2) So lange m positiv ist, mag es gross oder klein sein, so wird man doch immer n so gross nehmen können, dass $m - n$ negativ ist; es wird bei irgend einem dieser Faktoren ein Uebergang vom Positiven zum Negativen stattfinden. Das Produkt aller Faktoren, welche dem vorhergehen, mit welchem der Uebergang stattfindet, sei P , das einen bestimmten endlichen Werth hat. Jeder folgende Faktor wird immer ein echter Bruch sein, obgleich dieselben sich immer mehr der Einheit nähern, je grösser n wird, da ja Zähler und Nenner stets um die Einheit wachsen. Es ist also für jedes folgende n , wenn man natürlich überall vom Vorzeichen abstrahirt, C_{m-1}^k stets kleiner als P ; folglich wird der Werth C_{m-1}^k nie unendlich, sondern er nimmt immer noch ab, je grösser n wird, so lange nur m positiv ist.

Es convergirt also die Reihe

$$1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + C_m^4 \dots \text{in inf.}$$

ganz gewiss, so lange m positiv ist, während sie für $m = 0$ der Einheit gleich wird. Es ist aber

$$1 - C_m^1 \cdot z + C_m^2 \cdot z^2 - C_m^3 \cdot z^3 + C_m^4 \cdot z^4 \dots \text{in inf.} = (1 - z)^m$$

und deshalb der Werth der Reihe links, so lange sie convergirt, dem Werthe von $(1 - z)^m$ nothwendig gleich. Da sie nun convergirt für $z = 1$, so lange m positiv bleibt, so ist ihr Werth dann auch immer $= (1 - 1)^m = 0$. Es ist also die Summe von unendlich vielen Gliedern der Reihe

$$1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + C_m^4 \dots$$

so lange m positiv ist, nothwendig $= 0$.

Dieselbe Reihe ist aber auch $= (-1)^n \cdot C_{m-1}^n$, wenn man n unendlich gross nimmt, folglich immer

$$C_{m-1}^n = 0,$$

wenn m positiv und n unendlich ist.

Für $z = 1$ und m negativ muss dagegen die Reihe

$$1 - C_m^1 \cdot z + C_m^2 \cdot z^2 - C_m^3 \cdot z^3 + C_m^4 \cdot z^4 \dots \text{in inf.}$$

nothwendig divergiren; denn convergirte sie, d. h. hätte sie einen Werth, so müsste ihr Werth zugleich der von $(1 - z)^m$ sein, für $z = 1$ und m negativ. Es wird aber $(1 - 1)^m = \infty$, wenn m negativ ist. Folglich muss die Reihe

$$1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + C_m^4 \dots \text{in inf.} = C_{m-1}^n$$

nothwendig divergiren, so lange m negativ ist. Diese Reihe convergirt also, wenn m positiv, divergirt, wenn m negativ, wird gleich 1, wenn $m = 0$ ist.

Da nun aber aus dieser Reihe, wenn man $-m$ statt m setzt, sogleich folgende hervorgeht

$$1 + m + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \text{in inf.}$$

so ist klar, dass diese Reihe convergirt, wenn m negativ ist. Setzt man ihre Summe $= S$, so hat man

$$\frac{S-1}{m} = 1 + \frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3} + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = T.$$

Es convergirt also auch die Reihe T , wenn nur m negativ, übrigens noch so wenig von 0 verschieden ist. Für $m = 0$ wird sie aber divergirend, sie geht dann über in

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \text{ in inf. } = U.$$

Dividirt man in der Reihe T das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied durch das n^{te} , so erhält man $\frac{n}{n+1}$, und da die Reihe T immer convergirt, so lange m negativ ist, so scheint jede Reihe zu convergiren, in welcher von irgend einem Gliede ab der Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes durch das n^{te} keiner als $\frac{n}{n+1}$ ist, wenn die Reihe auch lauter positive Glieder hat; so dass die Reihe U gleichsam eine Grenze der Convergenz bildet, wenigstens für die Reihen, welche lauter positive Glieder haben.

Wendet man dieses auf die Reihe

$$1 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \dots \text{ in inf.}$$

an, so erhält man $-\frac{n-m}{n+1}$ als Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes durch das n^{te} ; es convergirt also diese Reihe immer, wenn m positiv ist, und zwar nicht nur diese Reihe an sich, welche zuletzt (wenn m positiv) immer Glieder mit abwechselnden Zeichen haben wird, sondern auch dann noch, wenn man alle Glieder positiv nimmt. Eine der vorigen ziemlich ähnliche Entwicklung ergiebt, dass unsere Reihe für ein negatives m nur dann convergiren wird, wenn $m = -1$ oder zwischen 0 und -1 liegt, dass sie dagegen immer divergirt, wenn m zwischen -1 und $-\infty$ liegt. Fassen wir das Gefundene zusammen, so ergiebt sich:

Die Reihe $1 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + C_m^4 + \dots$ in inf. convergirt, selbst wenn alle Glieder positiv genommen werden, so lange m positiv ist; sie convergirt auch dann noch, wenn m zwischen 0 und -1 liegt (hier aber nicht mehr, wenn man alle ihre Glieder positiv nimmt); sie divergirt dagegen immer, wenn m zwischen -1 und $-\infty$ liegt.

In den obigen Reihen X und Y oder

$$\sum C_m^k \cdot \cos(m-2k)x \text{ und } \sum C_m^k \cdot \sin(m-2k)x$$

werden alle Glieder, da cosinus und sinus ≤ 1 , kleiner oder gleich sein den gleichnamigen Gliedern in $\sum C_m^k$; es werden also die Reihen X und Y in allen Fällen convergiren, in welchen $\sum C_m^k$ convergirt, d. h. wenn m eine ganz beliebige aber positive Zahl ist. Für ein negatives m werden die Reihen X und

Y im Allgemeinen divergiren, obgleich es bei speciellen Werthen von m und x nicht unmöglich wäre, dass sie convergiren.

Wir haben also erhalten:

$$(2 \cdot \cos x)^m = X \cdot \cos 2mn\pi \mp Y \sin 2mn\pi + i \{ Y \cos 2mn\pi \mp X \sin 2mn\pi \},$$

$$\text{wo } X = \cos mx + m \cdot \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \cos(m-4)x + \dots$$

$$Y = \sin mx + m \cdot \sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \sin(m-4)x + \dots$$

Um ebenso die allgemeine Potenz des $\sin x$ zu erhalten, braucht man nur $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x zu schreiben. Die dann gefundene Formel scheint mir aber weniger zweckmässig, als die, welche man auf demselben Wege findet, auf welchem man die für die Potenz des cosinus gefunden.

Es ist nämlich

$$2 \cdot i \cdot \sin x = e^{ix} - e^{-ix},$$

$$\begin{aligned} \text{also } (2 \cdot i \cdot \sin x)^m &= \sum C_m^k (-1)^k \cdot e^{(m-2k)ix} \\ &= \sum (-1)^k \cdot C_m^k \cdot \cos(m-2k)x + i \sum (-1)^k \cdot C_m^k \cdot \sin(m-2k)x \\ &= X_1 + i Y_1. \end{aligned}$$

Dies ist ein specieller Werth, also ist der allgemeine

$$\begin{aligned} (2 \cdot i \sin x)^m &= \{X_1 + i Y_1\} \cdot \{\cos 2mn\pi \pm i \sin 2mn\pi\} \\ &= X_1 \cdot \cos 2mn\pi \mp Y_1 \sin 2mn\pi + i \{Y_1 \cos 2mn\pi \pm X_1 \sin 2mn\pi\}. \end{aligned}$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so geht diese Formel in die gewöhnlich als allgemein gegebene über:

$$(2 \cdot i \cdot \sin x)^m = X_1 + i Y_1.$$

Ist m eine gerade Zahl, so wird $Y_1 = 0$ und man erhält dann

$$(2 \cdot \sin x)^m = i^m \cdot X_1 = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \sum (-1)^k \cdot C_m^k \cdot \cos(m-2k)x.$$

Ist dagegen m ungerade, so wird $X_1 = 0$ und man erhält dann

$$(2 \cdot \sin x)^m = i^{m+1} \cdot Y_1 = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \cdot \sum (-1)^k \cdot C_m^k \cdot \sin(m-2k)x.$$

Für die Fälle, in welchen die Reihen X und Y convergiren, müssen sie einen bestimmten Werth haben; wir wollen diesen nun aufsuchen. Wenn wir zunächst den Werth der Reihe

$$\Sigma C_m^k \cdot \cos 2kx$$

bestimmen wollen, so finden wir, weil

$$2 \cdot \cos 2kx = e^{2kxi} + e^{-2kxi} \text{ ist:}$$

$$2 \cdot \Sigma C_m^k \cdot \cos 2kx = \Sigma C_m^k \cdot e^{2kxi} + \Sigma C_m^k \cdot e^{-2kxi}.$$

Es ist aber

$$(1 + e^{\pm 2xi})^m = \Sigma C_m^k \cdot e^{\pm 2kxi},$$

$$\begin{aligned} \text{also } 2 \cdot \Sigma C_m^k \cdot \cos 2kx &= (1 + e^{2xi})^m + (1 + e^{-2xi})^m \\ &= (1 + \cos 2x + i \sin 2x)^m + (1 + \cos 2x - i \sin 2x)^m \\ &= (2 \cdot \cos x)^m \cdot \{(\cos x + i \sin x)^m + (\cos x - i \sin x)^m\} \\ &= (2 \cdot \cos x)^m \cdot \{\cos(2n\pi + x)m + i \sin(2n\pi + x)m + \cos(2\nu\pi + x)m - i \sin(2\nu\pi + x)m\}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Werthes der Reihe

$$\Sigma C_m^k \cdot \sin 2kx$$

haben wir wieder wie vorhin

$$2 \cdot i \cdot \sin 2kx = e^{2kxi} - e^{-2kxi}$$

und erhalten desshalb

$$2i \Sigma C_m^k \cdot \sin 2kx = \Sigma C_m^k \cdot e^{2kxi} - \Sigma C_m^k \cdot e^{-2kxi}.$$

Oben war aber $(1 + e^{\pm 2xi})^m = \Sigma C_m^k \cdot e^{\pm 2kxi}$, also

$$\begin{aligned} 2i \cdot \Sigma C_m^k \cdot \sin 2kx &= (1 + e^{2xi})^m - (1 + e^{-2xi})^m \\ &= (1 + \cos 2x + i \sin 2x)^m - (1 + \cos 2x - i \sin 2x)^m \\ &= (2 \cdot \cos x)^m \cdot \{(\cos x + i \sin x)^m - (\cos x - i \sin x)^m\} \\ &= (2 \cdot \cos x)^m \cdot \{\cos(2n\pi + x)m + i \sin(2n\pi + x)m - \cos(2\nu\pi + x)m + i \sin(2\nu\pi + x)m\}. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, was für unsern vorliegenden Zweck passend ist, dass m positiv (übrigens rational oder irrational) und x reell ist, so müssen wir einen Unterschied machen zwischen dem Falle, wenn $\cos x$ positiv, und dem, wenn $\cos x$ negativ ist.

1) Wenn $\cos x$ positiv ist, x also zwischen den Grenzen $2\mu\pi - \frac{1}{2}\pi$ und $2\mu\pi + \frac{1}{2}\pi$ liegt.

In diesem Falle ist $(2 \cdot \cos x)^m$ jeder Zeit reell, und da die Reihe auf der linken Seite einen endlichen reellen Werth hat, so müssen die imaginä-

ren Glieder auf der rechten Seite verschwinden, es muss also $n = r$ sein, wodurch man erhält:

$$\Sigma C_m^k \cdot \cos 2kx = (2 \cdot \cos x)^m \cdot \cos(2n\pi + x)m$$

$$\Sigma C_m^k \cdot \sin 2kx = (2 \cdot \cos x)^m \cdot \sin(2n\pi + x)m.$$

Da nun die Reihen links nur *einen* Werth haben, so muss das n einen bestimmten Werth haben, welchen wir aus einem speciellen Falle bestimmen dürfen.

Für $x = 2\mu\pi$ wird aber

$$\Sigma C_m^k = 2^m = 2^m \cdot \cos 2(n + \mu)\pi m$$

$$0 = 2^m \cdot \sin 2(n + \mu)\pi m,$$

also $n = -\mu$, wenn x zwischen $2\mu\pi - \frac{1}{2}\pi$ und $2\mu\pi + \frac{1}{2}\pi$ liegt.

Wir erhalten also:

$$\Sigma C_m^k \cdot \cos 2kx = (2 \cdot \cos x)^m \cdot \cos(-2\mu\pi + x)m$$

$$\Sigma C_m^k \cdot \sin 2kx = (2 \cdot \cos x)^m \cdot \sin(-2\mu\pi + x)m.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos mx$, die zweite mit $\sin mx$ und addirt; sodann die erste mit $\sin mx$ und die zweite mit $\cos mx$ und subtrahirt, so erhält man:

$$\Sigma C_m^k \cdot \cos(m - 2k)x = (2 \cdot \cos x)^m \cdot \cos 2\mu\pi m$$

$$\Sigma C_m^k \cdot \sin(m - 2k)x = (2 \cdot \cos x)^m \cdot \sin 2\mu\pi m.$$

2) Wenn $\cos x$ negativ ist, x also zwischen den Grenzen $(2\mu + \frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu + \frac{3}{2})\pi$ liegt.

In diesem Falle geht $(2 \cdot \cos x)^m$ über in $[2 \cdot \cos x]^m \cdot (-1)^m$ oder in

$$[2 \cdot \cos x]^m \cdot (\cos \pi m + i \sin \pi m),$$

wenn man durch $[2 \cdot \cos x]^m$ das bezeichnet, dass $\cos x$ absolut, nicht mit dem negativen Zeichen genommen werden soll.

Da nach der Multiplication auf der rechten Seite das Imaginäre verschwinden muss, so wird $r = n + 1$, und man erhält also

$$\Sigma C_m^k \cdot \cos 2kx = [2 \cdot \cos x]^m \cdot \cos \{(2n + 1)\pi + x\}m$$

$$\Sigma C_m^k \cdot \sin 2kx = [2 \cdot \cos x]^m \cdot \sin \{(2n + 1)\pi + x\}m.$$

Stellt man dieselben Betrachtungen wie vorhin an, und giebt dem x den speciellen Werth $(2\mu + 1)\pi$, so erhält man

$$\Sigma C_m^k \cdot \cos 2kx = [2 \cdot \cos x]^m \cdot \cos \left\{ -(2\mu + 1)\pi + x \right\}^m$$

$$\Sigma C_m^k \cdot \sin 2kx = [2 \cdot \cos x]^m \cdot \sin \left\{ -(2\mu + 1)\pi + x \right\}^m.$$

Durch dieselbe Multiplication wie vorhin ergiebt sich dann schliesslich

$$\Sigma C_m^k \cdot \cos (m - 2k)x = [2 \cdot \cos x]^m \cdot \cos (2\mu + 1)\pi m$$

$$\Sigma C_m^k \cdot \sin (m - 2k)x = [2 \cdot \cos x]^m \cdot \sin (2\mu + 1)\pi m.$$

Wenn man durch $[2 \cdot \cos x]^m$ das bezeichnet, dass $\cos x$ absolut nicht mit dem negativen Zeichen genommen werden soll.

Man kann nach der Multiplication auf der rechten Seite das logarithmische ver-
schwinden muss, so wird $v = w + 1$, und man erhält also

$$\Sigma C_m^k \cdot \cos 2kx = [2 \cdot \cos x]^m \cdot \cos \left\{ (2\mu + 1)\pi + x \right\}^m$$

$$\Sigma C_m^k \cdot \sin 2kx = [2 \cdot \cos x]^m \cdot \sin \left\{ (2\mu + 1)\pi + x \right\}^m$$

Im Falle $\mu = 0$ geht $[2 \cdot \cos x]^m$ über in $[2 \cdot \cos x]^m \cdot (-1)^m$ oder in $[2 \cdot \cos x]^m$.