

7. Sekundärliteratur

**Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen
der Realschule I. Ordnung im Waisenhouse zu Halle am ...
in dem Versammlungssaale des neuen ...**

Halle (Saale), 1838

I. Bewegung zweier durch eine starre Linie verbundenen materiellen
Punkte auf einem verticalen Kreise.

Nutzungsbedingungen

Die Digitalisate des Francke-Portals sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen für wissenschaftliche und private Zwecke heruntergeladen und ausgedruckt werden. Vorhandene Herkunftsbezeichnungen dürfen dabei nicht entfernt werden.

Eine kommerzielle oder institutionelle Nutzung oder Veröffentlichung dieser Inhalte ist ohne vorheriges schriftliches Einverständnis des Studienzentrums August Hermann Francke der Franckeschen Stiftungen nicht gestattet, das ggf. auf weitere Institutionen als Rechteinhaber verweist. Für die Veröffentlichung der Digitalisate können gemäß der Gebührenordnung der Franckeschen Stiftungen Entgelte erhoben werden.

Zur Erteilung einer Veröffentlichungsgenehmigung wenden Sie sich bitte an die Leiterin des Studienzentrums, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

Terms of use

All digital documents of the Francke-Portal are protected by copyright. They may be downloaded and printed only for non-commercial educational, research and private purposes. Attached provenance marks may not be removed.

Commercial or institutional use or publication of these digital documents in printed or digital form is not allowed without obtaining prior written permission by the Study Center August Hermann Francke of the Francke Foundations which can refer to other institutions as right holders. If digital documents are published, the Study Center is entitled to charge a fee in accordance with the scale of charges of the Francke Foundations.

For reproduction requests and permissions, please contact the head of the Study Center, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Es mag die Schwerkraft auf das System wirken.

Bewegung zweier durch eine starre Linie verbundenen materiellen Punkte auf einem verticalen Kreise.

Da die beiden materiellen Punkte einen gegebenen Kreis nicht verlassen können, so wird die hieraus resultirende Bewegung ganz dieselbe sein, als wenn sich das gegebene System um eine feste Axe, die im Mittelpunkte des Kreises auf der Kreisebene senkrecht steht, drehen müßte. Wir können demnach anstatt der ersteren Bewegung die letztere betrachten. Natürlich wird der Abstand der beiden Punkte von dieser Drehungsaxe der Radius des gegebenen Kreises sein.

Es mag die Schwerkraft auf das System wirken.

Nennen wir die Componenten der Schwerkraft bezogen auf ein beliebiges rechtwinkliges Axensystem A , B , C , und das Potential der Erde auf einen Punkt des Systems V , so ist nach einer bekannten Eigenthümlichkeit des Potentials

$$\frac{dV}{dx} = A; \quad \frac{dV}{dy} = B; \quad \frac{dV}{dz} = C. \quad *) \quad (1)$$

Da aber

$$dV = \frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz,$$

so wird sich durch Substitution der Gleichung (1) ergeben:

$$dV = A dx + B dy + C dz,$$

woraus weiter die Formel:

$$V = Ax + By + Cz + E, \quad (2)$$

in der E eine Constante ist, resultirt. Bilden wir jetzt das Potential der Schwere auf das System. Dasselbe wird, wenn wir es durch W bezeichnen, durch den Ausdruck

$$W = SmV \quad (3)$$

*) Es sind $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ die partiellen Ableitungen von V nach x , y , z .

gegeben sein, in dem mV das Product des Potentials der Erde auf einen Punkt des Systems in seine Masse und das Zeichen S die Summe dieser Producte bezogen auf alle Punkte des Systems bezeichnet. Wir haben hiernach mit Berücksichtigung von (2):

$$W = SmV = ASmx + BSmy + CSmz + ESm.$$

Es ist Sm die Masse des Systems; ferner hat man für die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Schwerpunkts eines Systems von Punkten die Beziehungen:

$$x_1 = \frac{Smx}{Sm}; \quad y_1 = \frac{Smy}{Sm}; \quad z_1 = \frac{Smz}{Sm};$$

oder, wenn man die Masse des Systems M nennt,

$$Smx = Mx_1; \quad Smy = My_1; \quad Smz = Mz_1. \quad (4)$$

Mit Berücksichtigung dieser Formeln ergibt sich für W der Ausdruck:

$$W = M(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + E).$$

Bis jetzt war das rechtwinklige Azenssystem ein beliebiges. Machen wir aber die X -axe zur Drehungsaxe und nehmen wir die Z -axe in der Richtung der Schwere an (beide Azen stehen senkrecht auf einander), dann hat man:

$$A = 0; \quad B = 0; \quad C = g.$$

Hiernach verwandelt sich für dies specielle Azenssystem der Ausdruck für W in:

$$W = M(gz_1 + E).$$

Es sei nun l die Entfernung des Schwerpunkts des Systems von der Drehungsaxe; ferner bilde die Linie l mit der positiven Z -axe den Winkel φ ; dann hat man:

$$z_1 = l \cos \varphi.$$

Demnach ist

$$W = M(gl \cos \varphi + E). \quad (5)$$

Wir bemerken, daß φ positiv sein soll, wenn sich l auf der Seite der positiven y befindet, negativ dagegen, wenn sich diese Linie auf der Seite der negativen y befindet. Die Y -axe übrigens geht vom Mittelpunkte des Kreises aus und steht auf der XZ -ebene senkrecht, liegt also horizontal.

Differentiiren wir W nach φ , so erhalten wir für das Drehungsmoment der auf das System wirkenden Schwere:

$$\frac{dW}{d\varphi} = -Mgl \sin \varphi.$$

Da man ferner durch Multiplication von $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, wo φ der Drehungswinkel ist, in das Trägheitsmoment das Drehungsmoment der auf den Körper wirkenden

Kräfte erhält, so ergibt sich als dynamische Gleichung für unser um eine feste Axe drehbares System:

$$M \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Mgl \sin \varphi, \quad (6)$$

wo M das Trägheitsmoment bedeutet.

Sollte übrigens die Drehungsaxe auf der Richtung der Schwere nicht senkrecht stehen, also der Kreis nicht vertical stehen, so würde dadurch im Wesentlichen nichts geändert. Wir würden dann das rechtwinklige Coordinatensystem so annehmen, daß die Drehungsaxe (X axe), die Axe der z und die Richtung der Schwere in ein und derselben Ebene lägen und endlich die Axe der y darauf senkrecht stände. Bildet nun die Schwere mit der Axe der z den Winkel α , dann würde:

$A = g \sin \alpha$; $B = 0$; $C = g \cos \alpha$
sein. Demnach würde sich für W der Werth:

$$W = M(gx_1 \sin \alpha + gz_1 \cos \alpha + E)$$

ergeben. Substituirt man wieder für z_1 , $l \cos \varphi$, wo l und φ die frühere Bedeutung beibehalten, und differentiiert nach φ , so wird sich, da x_1 während der Bewegung constant bleibt,

$$\frac{dW}{d\varphi} = -Mgl \cos \alpha \sin \varphi$$

ergeben, ein Ausdruck, der sich von dem für die frühere Lage des Kreises gefundenen nur dadurch unterscheidet, daß g durch eine andere Constante $g \cos \alpha$ ersetzt ist. Da nun die Behandlung dieser Formel durchaus nicht anders sein wird als die der erstern, so werden wir die zuerst erhaltene (6) weiter discutiren.

Nennen wir die Massen der beiden Punkte, die unser System constituiren, m und m_1 und die Entfernung jedes derselben vom Mittelpunkte des Kreises r . Da

$$M = Smg^2,$$

wo g der Abstand eines Punktes von der Drehungsaxe ist, so verwandelt sich Formel (6) in:

$$r^2(m + m_1) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -(m + m_1)lg \sin \varphi,$$

oder in:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{lg}{r^2} \sin \varphi. \quad (7)$$

Es bleibt nur noch übrig, die Entfernung l des Schwerpunkts des Systems von der Drehungsaxe oder, was dasselbe ist, vom Anfangspunkte der Coordinaten zu bestimmen.

Durch eine ziemlich einfache Rechnung ergibt sich zur Bestimmung besagter Länge die Gleichung:

$$l^2 = \frac{r^2 (m^2 + m_1^2 + 2mm_1 \cos \beta)}{(m + m_1)^2},$$

in der mit β der Winkel, den die von den materiellen Punkten m und m_1 nach dem Ursprunge der Coordinaten, d. h. nach dem Mittelpunkte des Kreises gezogenen Radien einschließen, bezeichnet ist. Die dynamische Gleichung würde sich hiernach in:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{g \sqrt{m^2 + m_1^2 + 2mm_1 \cos \beta}}{r(m + m_1)} \cdot \sin \varphi \quad (8)$$

umsetzen. Der Quadratwurzel ist das positive Vorzeichen zuerkannt, da l eine absolute Länge ist.

Die Formel (6) kann als Bewegungsgleichung eines einfachen Pendels angesehen werden, dessen Länge $R = \frac{M}{Ml}$ ist. In unsern Falle würde

$$R = \frac{(m + m_1)r^2}{(m + m_1)l} = \frac{r^2}{l}$$

sein.

Durch Integration der Differentialgleichung (7) wird es möglich sein, den Winkel φ für jeden Augenblick zu finden. Kennt man aber φ , so wird, da l bekannt ist, die Lage des Schwerpunkts bestimmt. Ist aber dies der Fall, so ist auch die Lage der Massen m und m_1 bekannt, da sich die Winkel, die l mit den nach den Massen gezogenen Radien bildet, durch Betrachtung zweier Dreiecke leicht berechnen lassen.

Wäre $l = 0$, dann hätte man nach Gleichung (7):

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0;$$

woraus sich:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{Const.}$$

ergibt. Für diesen speciellen Fall würde also die Winkelgeschwindigkeit constant sein. Eine einfache Ueberlegung zeigt nun, daß $l = 0$ sein wird, wenn der Schwerpunkt des Systems in den Drehungspunkt fallen wird. Diese besondere Lage besagten Punktes kann aber nur dann eintreten, wenn $m = m_1$ ist, und diese Massen an den Endpunkten eines Durchmessers angebracht sind. Zu demselben Resultate muß man aber auch durch die Rechnung kommen. Aus dem für l^2 gefundenen Werthe ergibt sich, daß diese Größe verschwindet, wenn:

$$m^2 + m_1^2 + 2mm_1 \cos \beta = 0$$

ist. Daraus ergibt sich:

$$\cos \beta = - \frac{m^2 + m_1^2}{2mm_1}.$$

Soll aber die linke Seite der Werth eines Cosinus sein, so muß $m^2 + m_1^2 < 2mm_1$ sein. So lange nun m und m_1 verschiedene Massen sind, kann diese Ungleichung nicht erfüllt werden, da $(m - m_1)^2$ als Quadrat stets positiv ist; es bleibt demnach nur übrig $m = m_1$ zu setzen. Thut man dies wirklich, so ergibt sich für $\cos \beta$ der Werth -1 , also für β selbst der Werth π . Unsere Behauptung ist also durch die Rechnung verificirt worden.

Rehren wir aber jetzt zur weitem Discussion unsrer dynamischen Gleichung zurück. Dieselbe war:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{lg}{r^2} \sin \varphi;$$

der Werth von l ist uns bekannt. Durch Multiplication mit $2d\varphi$ und Integration ergibt sich:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2lg}{r^2} \cos \varphi + C. \quad (9)$$

Die Constante C wird dadurch bestimmt, daß für ein gewisses φ , für $\varphi = \alpha$, die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$ ist. Wir haben nämlich alsdann:

$$\Omega^2 = \frac{2lg}{r^2} \cos \alpha + C. \quad (10)$$

Durch Subtraction endlich hat man:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2lg(\cos \varphi - \cos \alpha)}{r^2} + \Omega^2. \quad (11)$$

Hätte man das System aus seiner Gleichgewichtslage um den Winkel α herausgebracht und dann sich selbst überlassen, so würde $\Omega = 0$ sein, und Gleichung (11) würde sich in:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2lg(\cos \varphi - \cos \alpha)}{r^2} \quad (11')$$

verwandeln. Erhält dagegen das System im Anfange seiner Bewegung irgend einen Stoß, so würde Ω von 0 verschieden sein. Es kommt darauf an diese Anfangsgeschwindigkeit zu berechnen. Die Massen der beiden Punkte, die das System constituiren, sind m und m_1 ; ferner mögen beide von der Drehungsaxe die Entfernung r haben. Beide Punkte sollen gleichzeitig gestossen werden. Jede dieser Stoßkräfte kann man in zwei zerlegen, von denen die eine, die parallel zur Drehungsaxe wirkt, durch die für

das System existirenden Bedingungen unwirksam gemacht wird, während die andere in der Kreisebene wirkt. Nennen wir nun die Geschwindigkeiten, welche diese Kräfte den Punkten m und m_1 , wenn sie frei wären, ertheilen würden, v und v_1 , ferner Ω die Winkelgeschwindigkeit, die wirklich erzielt wird; so wird der Punkt m die Geschwindigkeit $r\Omega$ und ebenso der Punkt m_1 die Geschwindigkeit $r_1\Omega$ haben. Nun muß aber nach dem Principe von d'Alembert zwischen den Bewegungsgrößen — $mr\Omega$, — $m_1r_1\Omega$ Gleichgewicht stattfinden. Bezeichnen wir deshalb die Längen der Lothe, die man vom Mittelpunkte des Kreises auf die Richtungen von v und v_1 fällt, mit p und p_1 und berücksichtigen wir ferner, daß der Radius auf den Bewegungsgrößen $mr\Omega$ und $m_1r_1\Omega$ senkrecht steht, so haben wir nach dem Satze von den Momenten:

$$mr^2\Omega + m_1r_1^2\Omega = mvp + m_1v_1p_1,$$

oder

$$(m + m_1)r^2\Omega = mvp + m_1v_1p_1,$$

woraus sich für die Winkelgeschwindigkeit der Werth

$$\Omega = \frac{mvp + m_1v_1p_1}{(m + m_1)r^2} \quad (12)$$

ergiebt.

Hätte man bloß dem einem Punkte, z. B. dem Punkte m die Geschwindigkeit v , dem Punkte m_1 aber keine ertheilt, so hätte man nur in Gleichung (12) für v_1 den Werth 0 zu substituiren und erhielte:

$$\Omega = \frac{mvp}{(m + m_1)r^2}.$$

Wenn aber die beiden materiellen Punkte nicht gleichzeitig gestoßen werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn das System mehrere Stöße in Zeitintervallen erleidet, so würde die Sache nicht wesentlich complicirter. Wie man die aus im Anfange der Bewegung erfolgten Stößen resultirende Winkelgeschwindigkeit findet, ist eben gezeigt worden. Setzt empfangen aber die Punkte des Systems bei andern aber bekannten Ausschlagswinkeln neue Stöße. Um auch sie in Rechnung zu bringen, wird man die in diesem Punkte durch die Bewegung schon erlangte Winkelgeschwindigkeit aus Gleichung (11) berechnen, dasselbe mit der Winkelgeschwindigkeit, die aus dem Stoße an diesem Punkte sich ergibt, thun und beide Größen addiren. Setzt man die so erhaltene resultirende Winkelgeschwindigkeit nebst dem dazugehörigen Ausschlagswinkel in Gleichung (9) ein, dann hat man durch Subtraction der so erhaltenen Gleichung von Gleichung (9) die Gleichung für die fernere Bewegung. So hätte man fortzufahren, wenn bei mehreren Ausschlagswinkeln neue Stöße auf das System wirkten. Allerdings ist hierbei die Kenntniß der Ausschlagswinkel vorausgesetzt. Wären anstatt

dieser die Zeiten, in welchen die Stöße erfolgen, gegeben, so müßte erst für jede Zeit der dazugehörige Ausschlagswinkel gefunden werden. Vor der Hand ist diese Rechnung unmöglich; erst später würden wir sie ausführen können.

Nachdem die Anfangsgeschwindigkeit Ω bestimmt ist, kehren wir zur Formel (11) zurück. Setzt man in ihr für φ , — φ , dann ergibt sich für $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ derselbe Werth.

Ferner wird die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ihr Maximum erreichen, wenn der Ausdruck:

$$2lg(\cos \varphi - \cos \alpha) + r^2\Omega^2$$

oder, was dasselbe ist, wenn $\cos \varphi$ am größten ist. Dies ist aber der Fall für $\varphi = 0$. Fällt also die Verbindungslinie des Schwerpunktes des Systems mit dem Drehungspunkte, d. h. die Linie l mit der Verticalen zusammen, dann hat das System die größte Geschwindigkeit.

Dagegen wird die Winkelgeschwindigkeit gleich Null werden, wenn der Ausdruck:

$$2lg(\cos \varphi - \cos \alpha) + r^2\Omega^2$$

verschwindet. Diese Bedingungsgleichung reducirt sich darauf, daß:

$$\cos \varphi = \frac{2lg \cos \alpha - r^2\Omega^2}{2lg}$$

sein muß. Hierbei muß aber vorausgesetzt werden, daß die rechte Seite ein ächter Bruch ist, weil sie ja sonst keinen Cosinus vorstellen könnte. Demnach würde $\frac{d\varphi}{dt}$ überhaupt nicht Null werden können, wenn der absolute Werth von $2lg \cos \alpha - r^2\Omega^2$ größer als $2lg$ wäre, ein Fall, der sehr wohl eintreten könnte, da die Größe Ω beliebig groß sein kann.

Aus dieser Ueberlegung geht hervor, daß das Verhältniß des absoluten Werthes von $2lg \cos \alpha - r^2\Omega^2$ zu der Größe $2lg$ die Art der Bewegung wesentlich bedingt. Wir werden deshalb bei der Discussion der Bewegung des Systems die drei möglichen Fälle, die sich aus dem Verhältnisse beider Größen ergeben, unterscheiden müssen.

Wenn $\frac{d\varphi}{dt}$ nie verschwindet, dann wird sich das System stets in einem und demselben Sinne im Kreise herumbewegen, während, wenn $\frac{d\varphi}{dt}$ verschwindet, ein Hin- und Herbewegen eintreten wird.

Wäre $l = 0$, läge also der Schwerpunkt des Systems im Drehungspunkte, und hätte man außerdem $\Omega = 0$, so wäre

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \\ \varphi = \text{Const.}$$

also
Wir finden also das allgemeine Gesetz, daß ein schwerer Körper, sobald er im Schwerpunkt unterstützt ist, in jeder Lage im Gleichgewichte ist, für einen speciellen Fall bestätigt. Hätte man demnach zwei Punkte mit gleicher Masse und verbände sie durch eine gewichtlose starre Linie (es könnte auch eine homogene schwere Linie sein: nur folgt dies nicht aus unsrer Betrachtung), machte endlich ihren Mittelpunkt zum Drehungspunkte, so würde sich das System der zwei Punkte im indifferenten Gleichgewichte befinden.

Setzen wir ferner in Gleichung (11) $a = \pi$, so ergibt sich:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{4lg \cos^2 \frac{\varphi}{2} + r^2 \Omega^2}{r^2}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß $\frac{d\varphi}{dt}$ nie verschwinden kann, wenn nicht $\Omega = 0$ ist.

Selbst wenn Ω sehr klein wäre, würde die Winkelgeschwindigkeit doch nicht Null sein. Wir werden sogleich sehen, daß hierdurch das Gesetz, daß ein Körper, der sich im labilen Gleichgewichte befindet, durch den geringsten Stoß aus dieser Gleichgewichtslage herausgebracht wird und vollkommen umschlägt, für unser System seine Bestätigung findet. Indem wir nämlich $a = \pi$ setzen, haben wir den Schwerpunkt des Systems senkrecht über den Unterstützungspunkt gebracht; durch einen kleinen Stoß, der durch Ω repräsentirt ist, haben wir ihn aus dieser Lage entfernt. Da wir nun gefunden haben, daß bei diesen Annahmen $\frac{d\varphi}{dt}$ nie Null werden kann, so zeigt sich, daß unser durch einen kleinen Stoß aus der labilen Gleichgewichtslage herausgebrachte System nicht etwa wieder stillsteht und nach seiner Gleichgewichtslage zurückschwingt, sondern daß es vielmehr vollständig umschlägt und sich im Kreise herum immer nach einer Richtung hin fortbewegt.

Setzen wir endlich in Gleichung (11), $a = 0$, so ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit die Gleichung:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{-4lg \sin^2 \frac{\varphi}{2} + r^2 \Omega^2}{r^2}.$$

Soll jetzt $\frac{d\varphi}{dt}$ verschwinden, so muß

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{r^2 \Omega^2}{4lg}$$

sein. Da die Größe Ω beliebig groß sein kann, so könnte allerdings der Fall eintreten, daß die rechte Seite kein ächter Bruch wäre, und demnach $\frac{d\varphi}{dt}$ nicht verschwände.

Setzen wir aber besagte Größe klein genug voraus, so kann ganz entschieden $\frac{d\varphi}{dt}$ verschwinden. Hierin findet aber die charakteristische Eigenschaft des stabilen Gleichgewichts für unser System ihre Bestätigung. Setzen wir nämlich $\alpha = 0$ voraus, so ist der Schwerpunkt des Systems senkrecht unter den Unterstützungspunkt gebracht worden. Da sich nun ferner ergab, daß, wenn dasselbe durch einen kleinen Stoß aus der Gleichgewichtslage gebracht ist, seine Winkelgeschwindigkeit bis Null abnimmt, worauf natürlich ein Herabfallen und ein Aufsteigen nach der andern Seite und sofort erfolgen muß, bestätigt sich für unser System das allgemeine Gesetz, daß ein aus seiner stabilen Gleichgewichtslage durch einen kleinen Stoß herausgebrachter Körper um dieselbe pendelt.

Aus Gleichung (11) ergibt sich:

$$dt^2 = \frac{r^2 d\varphi^2}{2lg(\cos \varphi - \cos \alpha) + r^2 \Omega^2},$$

oder:

$$dt = \frac{\pm r d\varphi}{\sqrt{2lg(\cos \varphi - \cos \alpha) + r^2 \Omega^2}}.$$

Die Bestimmung des Vorzeichens wird folgende Betrachtung ermöglichen. Der Schwerpunkt mag sich auf der Seite der positiven y befinden und nach unten fallen. Da jetzt der Drehungswinkel abnimmt, ist das Differential $d\varphi$ negativ; das Differential der Zeit dt dagegen ist seinem Begriffe nach positiv. Demnach muß das negative Zeichen gewählt werden. Entfernt sich weiter der Schwerpunkt von seiner tiefsten Lage hinweg nach der Seite der negativen y hin, dann wird der Drehungswinkel immer negativ größer (also eigentlich kleiner); demnach ist sein Differential wieder negativ. Also ist auch jetzt das negative Zeichen zu wählen. Demnach ist überhaupt das negative Zeichen zu nehmen, so lange die Bewegung in demselben Sinne von den positiven y nach den negativen y hin erfolgt. Dagegen wird das positive Zeichen zu wählen sein, wenn die Bewegung den entgegengesetzten Sinn hat, weil jetzt das Differential des Drehungswinkels positiv ist.

Wir haben demnach:

$$dt = \frac{-rd\varphi}{\sqrt{2lg(\cos \varphi - \cos a) + r^2\Omega^2}}, \quad (14)$$

und daraus:

$$t = - \int_a^{\varphi} \frac{rd\varphi}{\sqrt{2lg(\cos \varphi - \cos a) + r^2\Omega^2}}. \quad (15)$$

Wir fanden schon oben, daß die Art der Bewegung davon abhängt, in welchem Verhältnisse die Größe $2lg \cos a - r^2\Omega^2$ zu der Größe $2lg$ steht. Gehen wir deshalb bei Betrachtung des Integrals hiervon aus und unterscheiden folgende drei Fälle:

Der absolute Werth von $2lg \cos a - r^2\Omega^2$ $> 2lg$,
derselbe $< 2lg$,
derselbe $= 2lg$.

Der erste Fall kann durch folgende zwei Ungleichungen ausgedrückt werden:

$$\begin{cases} \frac{2lg \cos a - r^2\Omega^2}{2lg} > 1 \\ \frac{2lg \cos a - r^2\Omega^2}{2lg} < -1, \end{cases}$$

oder:

$$\begin{cases} 2lg(\cos a - 1) > r^2\Omega^2 \\ 2lg(\cos a + 1) < r^2\Omega^2. \end{cases}$$

Die erste Ungleichung führt auf Unsinn, da eine positive Größe nie kleiner als eine negative sein kann. Daher wird der erste der drei Fälle durch die Ungleichung:

$$a) \quad \Omega > \frac{2 \cos \frac{a}{2}}{r} \sqrt{lg}$$

characterisirt. Es ist noch zu bemerken, daß die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, da Ω positiv vorausgesetzt wird und $\cos \frac{a}{2}$ stets positiv ist.

Ferner kann der zweite Fall durch die zwei Ungleichungen:

$$\begin{cases} \frac{2lg \cos a - r^2\Omega^2}{2lg} < 1 \\ \frac{2lg \cos a - r^2\Omega^2}{2lg} > -1; \end{cases}$$

oder:

$$\begin{cases} 2lg(\cos a - 1) < r^2\Omega^2 \\ 2lg(\cos a + 1) > r^2\Omega^2, \end{cases}$$

oder:

$$\begin{cases} r^2\Omega^2 > -4lg \sin^2 \frac{a}{2} \\ r^2\Omega^2 < 4lg \cos^2 \frac{a}{2} \end{cases}$$

bestimmt werden. Da nun $r^2\Omega^2$ als quadratische Größe stets positiv sein muß, so ist die erste Bedingung unnötig. Demnach wird der zweite der erwähnten Fälle durch die Ungleichung:

$$\beta) \quad \Omega < \frac{2 \cos \frac{a}{2}}{r} \sqrt{lg}$$

characterisirt. Die Wurzel ist aus den bei α) angegebenen Gründen wieder positiv zu nehmen.

Der dritte Fall endlich wird durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} 2lg \cos a - r^2\Omega^2 = 2lg \\ 2lg \cos a - r^2\Omega^2 = -2lg, \end{cases}$$

oder:

$$\begin{cases} 2lg(\cos a - 1) = r^2\Omega^2 \\ 2lg(\cos a + 1) = r^2\Omega^2 \end{cases}$$

bestimmt. Da die erste Gleichung, wie leicht ersichtlich, unsinnig ist, kann nur die zweite gelten, so daß der dritte Fall durch die Gleichung

$$\gamma) \quad \Omega = \frac{2 \cos \frac{a}{2}}{r} \sqrt{lg}$$

characterisirt ist. Das Vorzeichen der Wurzel wird wieder positiv sein, da die Größe Ω positiv vorausgesetzt ist.

Wir haben diese Discussion vorgenommen, weil sie sich im Gange der Untersuchung von selbst dargeboten hat und nicht ganz uninteressant ist. Man kann aber sogleich sehen, daß die Betrachtung des Integrials unmittelbar die Aufstellung jener drei Fälle nöthig macht. Für Gleichung (15) kann man nämlich:

$$t = \int_q^a \frac{rd\varphi}{\sqrt{2lg(\cos \varphi - \cos a) + r^2\Omega^2}} \quad (16)$$

schreiben, worin t die Zeit bedeutet, die das System gebraucht, damit sich der ursprüngliche Ausschlagswinkel bis zur Größe φ verringert. Da ferner:

2 *

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

ist, verwandelt sich Gleichung (16) durch Substitution in:

$$t = \int_{\varphi}^{\alpha} \frac{rd\varphi}{\sqrt{r^2\Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 4lg \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (17)$$

Man erkennt sogleich, daß sich unser Integral schließlich auf ein elliptisches reduciren läßt. Damit aber die Form, die letzteres haben muß, wirklich erzielt wird, muß unter dem Wurzelzeichen durch die Größe $r^2\Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ dividirt werden. Zwar

ist dann $\frac{4lg}{r^2\Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ eine positive Größe und demnach gleich einem Qua-

drate zu achten; aber es ist außerdem noch nothwendig, daß dieser Quotient ein echter Bruch ist. Demnach sind wir gezwungen, auf die Unterscheidung folgender Fälle:

$$\frac{4lg}{r^2\Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{\alpha}{2}} < 1$$

$$\frac{4lg}{r^2\Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{\alpha}{2}} > 1$$

$$\frac{4lg}{r^2\Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 1$$

einzugehen. Diese Fälle können auch in folgender Weise umgeschrieben werden:

$$\Omega > \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{r} \sqrt{lg}$$

$$\Omega < \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{r} \sqrt{lg}$$

$$\Omega = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{r} \sqrt{lg}.$$

Von der Identität dieser Fälle mit den unter α), β), γ), angeführten überzeugt man sich durch Vergleichung.

Die fixirten drei Fälle betrachten wir jetzt einzeln:

Erster Fall:
$$\Omega > \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{r} \sqrt{lg}.$$

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, ist für diesen Fall die Größe

$$\frac{4lg}{r^2 \Omega^2 + 4gl \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

ein positiver echter Bruch, den wir mit k^2 bezeichnen wollen. Durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung (17) ergibt sich:

$$t = \frac{k}{2\sqrt{lg}} \int_{\varphi}^{\alpha} \frac{rd\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

oder:

$$t = \frac{kr}{\sqrt{lg}} \int_{\varphi}^{\alpha} \frac{\frac{d\varphi}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Setzen wir in diesem Integral $\varphi = 2\vartheta$, so verwandelt es sich, da $d\varphi = 2d\vartheta$, und für die Grenzen φ und α bezüglich $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\varphi}{2}$ zu setzen ist, in:

$$t = \frac{kr}{\sqrt{lg}} \int_{\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}. \quad (18)$$

Durch Zerlegung dieses Integrals ergibt sich:

$$t = \frac{kr}{\sqrt{lg}} \left\{ \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} - \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \right\},$$

oder nach der von Legendre eingeführten Bezeichnung:

$$t = \frac{kr}{\sqrt{lg}} \left\{ F(k, \frac{1}{2}\alpha) - F(k, \frac{\varphi}{2}) \right\}. \quad (19)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\varphi = 0$, so ergibt sie uns die Zeit, die der Schwerpunkt gebraucht, um von seiner Anfangslage bis zur tiefsten Lage zu gelangen. Demnach ist der Werth jener Zeit, die wir mit τ bezeichnen wollen

$$\tau = \frac{kr}{\sqrt{lg}} F(k, \frac{1}{2}\alpha). \quad (20)$$

Führt man diesen Werth in die Gleichung (19) ein, so hat man allgemein

$$t - \tau = - \frac{kr}{\sqrt{lg}} F(k, \frac{\varphi}{2}). \quad (21)$$

Aus Betrachtungen, die wir früher angestellt haben, wissen wir, daß in diesem Falle das System nie zur Ruhe kommt, sondern sich stets im Kreise herum in ein und demselben Sinne bewegt. Man kann deshalb fragen, in welcher Zeit ein ganzer Umlauf vollendet wird. Zur Ermittlung dieser Zeitdauer, die mit T bezeichnet werden soll, dient die Gleichung (18). Der Anfangswerth des Winkels φ ist α , während der Endwerth $-(\pi + \pi - \alpha)$ oder $\alpha - 2\pi$ ist. Nach der erwähnten Gleichung haben wir zur Bestimmung von T die Gleichung:

$$T = \frac{kr}{\sqrt{lg}} \int_{\frac{\alpha}{2} - \pi}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Dieses Integral läßt sich leicht umformen. Setzen wir zu dem Ende $\vartheta = -\eta$, so erhält man:

$$\begin{aligned} T &= - \frac{kr}{\sqrt{lg}} \int_{\pi - \frac{\alpha}{2}}^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} \\ &= \frac{kr}{\sqrt{lg}} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\pi - \frac{\alpha}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} \\ &= \frac{kr}{\sqrt{lg}} \left\{ \int_{-\frac{\alpha}{2}}^0 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} + \int_0^{\pi} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} - \int_{\pi - \frac{\alpha}{2}}^{\pi} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man ferner im Integral $\int_{\pi - \frac{\alpha}{2}}^{\pi} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}}$ für η , $\pi - \psi$, so verwandelt sich

dasselbe in:

$$-\int_{\frac{\alpha}{2}}^0 \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

das für $\psi = -\chi$ in:

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^0 \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}}$$

übergeht. Durch Substitution dieses Ausdrucks für T ergibt sich für die Schwingungsdauer der Werth:

$$T = \frac{kr}{\sqrt{lg}} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}},$$

oder:

$$T = \frac{2kr}{\sqrt{lg}} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right). \quad (22)$$

Geht man ferner zu den umgekehrten Functionen über, so erhält man aus Gleichung (21):

$$\frac{\varphi}{2} = \operatorname{am}\left(\frac{(\tau - t)\sqrt{gl}}{kr}\right), \quad (23)$$

und also:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \operatorname{am}\left(\frac{(\tau - t)\sqrt{gl}}{kr}\right). \quad (23')$$

Wollte man endlich die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ durch die Zeit ausdrücken, so müßte man Formel (23) nach der Zeit differenziren. Der Einfachheit wegen wollen wir vor der Hand die Größe

$$\frac{(\tau - t)\sqrt{gl}}{kr} = a$$

setzen. Durch Differentiation erhalten wir:

$$\frac{d\varphi}{2} = d \operatorname{am} a.$$

Nun ist aber:

$$\Delta am a da = d am a;$$

demnach:

$$\frac{d\varphi}{2} = \Delta am a da,$$

und:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2 \frac{da}{dt} \Delta am a,$$

oder, wenn man a durch seinen Werth ersetzt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{2\sqrt{gl}}{kr} \Delta am \left(\frac{(\tau - t)\sqrt{gl}}{kr} \right). \quad (24)$$

Setzt man in dieser Formel für t, τ , so erhält man, da

$$\Delta am 0 = 1$$

ist,

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{2\sqrt{gl}}{kr},$$

d. h.: zur Zeit τ ist die Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\sqrt{gl}}{kr}$, aber das System bewegt sich nach derjenigen Richtung, für welche φ abnimmt, sein Differential demnach negativ ist.

Zu dem Werthe von $\frac{d\varphi}{dt}$ gelangen wir auch, wenn wir in Gleichung (11) $\varphi = 0$ setzen; für diesen Winkel ist aber, wie wir dort gefunden haben, die Geschwindigkeit am größten.

Zweiter Fall:
$$\Omega < \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{r} \sqrt{lg}.$$

Wir haben früher gefunden, daß, wenn diese Ungleichung gilt, die Größe

$$\frac{r^2 \Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4lg}$$

ein unächter Bruch ist. Soll jetzt unser Integral auf die Form eines elliptischen gebracht werden, so wird eine Umformung desselben erforderlich sein. Bemerken wir, daß

$$\frac{r^2 \Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4lg}$$

für unsern Fall ein ächter Bruch ist, den wir, da er positiv ist, durch k^2 bezeichnen wollen. Dies vorausgeschickt, verwandelt sich Gleichung (17) in:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{lg}} \int_{\varphi}^a \frac{d\varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

oder in:

$$t = \frac{r}{\sqrt{lg}} \int_{\varphi}^a \frac{\frac{d\varphi}{2}}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Um dies Integral umzuformen, setzen wir:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \vartheta.$$

Da nun:

$$\frac{d\varphi}{2} = \frac{k \cos \vartheta d\vartheta}{\cos \frac{\varphi}{2}}$$

ist, setzt sich das obige Integral in:

$$t = \frac{r}{\sqrt{lg}} \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

um. Die obere Grenze ϑ_0 wird durch die Gleichung:

$$\sin \frac{a}{2} = k \sin \vartheta_0$$

bestimmt. Benutzen wir wieder die Legendre'sche Bezeichnungsweise, so ergibt sich:

$$t = \frac{r}{\sqrt{lg}} \{F(k, \vartheta_0) - F(k, \vartheta)\}. \quad (25)$$

Bestimmen wir zuerst die Zeit, die der Schwerpunkt des Systems gebraucht, um in seine tiefste Lage zu kommen. Für sie ist $\varphi = 0$, also auch, da $\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \vartheta$ ist, $\vartheta = 0$. jene Zeit, die wir mit τ bezeichnen wollen, ist demnach durch die Gleichung:

$$\tau = \frac{r}{\sqrt{lg}} F(k, \vartheta_0) \quad (26)$$

bestimmt. Durch Einführung dieser Zeit τ in die Gleichung (25) setzt sich letztere in:

$$t - \tau = - \frac{r}{\sqrt{lg}} F(k, \vartheta) \quad (27)$$

um.

Um ferner die Zeit zu bestimmen, die der Schwerpunkt gebraucht, um zum ersten Male zur Ruhe zu kommen (solche Ruhelagen werden von Zeit zu Zeit eintreten, da das System bei der für unsern Fall gemachten Voraussetzung nach früheren Betrachtungen hin- und herpendelt), setzen wir die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = 0$. Dieser Gleichung wird aber genügt, wenn:

$$2lg(\cos \varphi - \cos \alpha) + r^2 \Omega^2 = 0$$

ist. Durch weitere Entwicklung ergibt sich:

$$4lg\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) + r^2 \Omega^2 = 0.$$

Mit Berücksichtigung des Werthes von k^2 verwandelt sich unsere Gleichung in:

$$4lg\left(k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) = 0,$$

woraus sich endlich:

$$k = \pm \sin \frac{\varphi}{2}$$

ergiebt. Ueber die Wahl des Vorzeichens entscheidet folgende einfache Betrachtung. Wir haben angenommen, daß das Pendel von den positiven Winkeln φ aus nach den negativen schwingt; dasselbe muß deshalb bei einem gewissen negativen φ zum ersten Male zur Ruhe kommen. Da nun $\frac{\varphi}{2}$ immer kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, wird $\sin \frac{\varphi}{2}$ negativ sein; die Größe k ist aber eine positive Größe; demnach muß, damit die rechte Seite auch positiv ist, das negative Vorzeichen gewählt werden, so daß hiernach:

$$k = - \sin \frac{\varphi}{2}$$

ist. Aus der Gleichung:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \vartheta$$

ergiebt sich nun aber, daß der diesem Winkel φ entsprechende Winkel ϑ durch die Gleichung:

$$\sin \vartheta = -1$$

gegeben ist, aus der sich für den Winkel ϑ selbst der Werth $-\frac{\pi}{2}$ ergibt. Nennen wir die fragliche Zeit, die also das System gebraucht, damit die Ruhelage zum ersten Male gewonnen wird, mit t_0 . Zu ihrer Bestimmung dient die Gleichung (25), aus der sich:

$$t_0 = \frac{r}{\sqrt{lg}} \left\{ F(k, \vartheta_0) - F(k, -\frac{\pi}{2}) \right\}$$

ergiebt. Berücksichtigt man, daß:

$$F(k, -\frac{\pi}{2}) = -F(k, \frac{\pi}{2})$$

ist (von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugt man sich, wenn man für ϑ , $-\eta$ setzt), so wird die Gleichung zur Bestimmung der Zeit t_0 :

$$t_0 = \frac{r}{\sqrt{lg}} \left\{ F(k, \vartheta_0) + F(k, \frac{\pi}{2}) \right\}.$$

Durch Subtraction der Zeit τ von der eben gefundenen Zeit t_0 ergiebt sich die halbe Schwingungsdauer, die demnach nach erfolgter Vereinfachung:

$$t_0 - \tau = \frac{r}{\sqrt{lg}} F(k, \frac{\pi}{2})$$

ist, woraus sich für die Dauer einer einfachen ganzen Schwingung der Werth:

$$\frac{2r}{\sqrt{lg}} F(k, \frac{\pi}{2})$$

ergiebt.

Wäre die Anfangsgeschwindigkeit $\Omega = 0$, hätte also das System am Anfange der Bewegung keinen Stoß erhalten, dann vereinfachte sich der Werth für k , der nach dem Früheren:

$$\frac{\sqrt{r^2 \Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{a}{2}}}{2\sqrt{lg}}$$

ist, in:

$$k = \sin \frac{a}{2},$$

so daß unter dieser Voraussetzung die Dauer eines Hin- und Hergangs, die wir mit T bezeichnen wollen,

$$T = \frac{4r}{\sqrt{lg}} F\left(\sin \frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (28)$$

wäre.

Geht man ferner zu den umgekehrten Functionen über, so kann man ebenso wie im ersten Falle den Ausschlagswinkel und die Winkelgeschwindigkeit durch die Zeit ausdrücken.

Aus der Gleichung (27) ergibt sich nämlich:

$$\vartheta = \operatorname{am} \left(\frac{(\tau - t) \sqrt{lg}}{r} \right). \quad (29)$$

Da man aber:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \vartheta$$

hat, so ist:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \operatorname{am} \left(\frac{(\tau - t) \sqrt{lg}}{r} \right).$$

Ferner erhält man durch Differentiation der zwischen φ und ϑ existirenden Gleichung:

$$\cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{2} = k \cos \vartheta d\vartheta,$$

aus der sich, wenn man wieder $\frac{(\tau - t) \sqrt{lg}}{r}$ einstweilen mit a bezeichnet,

$$\frac{d\varphi}{2} = \frac{k \cos \vartheta d\vartheta}{\cos \frac{\varphi}{2}},$$

oder:

$$\frac{d\varphi}{2} = \frac{k \cos \operatorname{am} a da}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a}},$$

oder endlich:

$$\frac{d\varphi}{2} = \frac{k \cos \operatorname{am} a da}{\Delta \operatorname{am} a}$$

ergibt. Da nun:

$$\Delta \operatorname{am} a da = d \operatorname{am} a$$

ist, resultirt als Werth für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2k \cos \operatorname{am} a \frac{da}{dt},$$

der sich durch Substitution des Werthes für a in:

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{2k \sqrt{lg}}{r} \cos \operatorname{am} \frac{(\tau - t) \sqrt{lg}}{r} \quad (30)$$

verwandelt.

$$\text{Dritter Fall:} \quad \Omega = \frac{2 \cos \frac{a}{2}}{r} \sqrt{lg}.$$

Bei dieser Annahme ist, wie wir oben gesehen haben,

$$\frac{4lg}{r^2\Omega^2 + 4lg \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 1,$$

oder:

$$r^2\Omega^2 = 4lg \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichung verwandelt sich die Gleichung (17) in:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{lg}} \int_{\varphi}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}},$$

oder in:

$$t = \frac{r}{\sqrt{lg}} \int_{\varphi}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Aus ihr erhält man bei Ausführung der Integration:

$$t = \frac{r}{\sqrt{lg}} l \cdot \frac{\lg \frac{\alpha + \pi}{4}}{\lg \frac{\varphi + \pi}{4}}. \quad (31)$$

Setzt man $\alpha = \pi$, dann ergibt sich für t der Werth ∞ . Wenn also der Schwerpunkt des Systems anfangs senkrecht über dem Drehungspunkte steht, dann findet gar keine Bewegung statt. Hiervon kann man sich auch durch folgende einfache Betrachtung überzeugen. Es ist nämlich unter der gemachten Voraussetzung die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 0$, wie sich aus der unsern dritten Fall characterisirenden Bedingungsgleichung ergibt. Demnach ist kein Grund vorhanden, warum das System sein labiles Gleichgewicht verlassen sollte; dasselbe bleibt für alle Zeiten in Ruhe.

Wollte man ferner wissen, wann der Schwerpunkt bei seiner Bewegung in diese Lage kommt, so hat man in Gleichung (31), $\varphi = -\pi$ zu setzen. Thut man dies aber, so ergibt sich für t der Werth ∞ . Dieser für t gefundene Werth ist dahin zu deuten, daß der Schwerpunkt nie diese höchste Lage erreichen wird.

Setzen wir in Gleichung (31), $\varphi = 0$, dann erhalten wir:

$$t = \frac{r}{\sqrt{lg}} l \cdot \lg \frac{\pi + \alpha}{4}.$$

Da aber φ für den tiefsten Punkt, den der Schwerpunkt einnehmen kann, den Werth

0 hat, so ist der soeben für t gefundene Werth die Zeit, die der Schwerpunkt gebraucht, um in besagte Lage zu kommen.

Dieser dritte Fall ist übrigens, wie man sieht, der einzige, in dem sich die Integration unter endlicher Form ausführen läßt.

Somit wäre die dynamische Gleichung (9) vollständig discutirt. Die Durchführung enthält der allgemeinen Gesichtspunkte so viele, daß ihre Veröffentlichung für manchen wohl nicht ganz uninteressant sein möchte.

Der Vollständigkeit halber will ich die dynamische Gleichung (9) noch auf eine andre gewöhnlichere Weise entwickeln.

Die Gleichung der lebendigen Kräfte liefert uns die Relation:

$$\frac{1}{2} d\Sigma mv^2 = g(md z + m_1 dz_1), \quad (32)$$

wenn man die Coordinaten der materiellen Punkte m und m_1 bezüglich mit y, z, y_1, z_1 bezeichnet. Dabei soll die Aze der y horizontal liegen, während die Aze der z als in der Richtung der Schwerkraft gelegen angenommen werden soll. Durch Integration der Gleichung (32) ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 = g(mz + m_1 z_1) + C, \quad (33)$$

wo C eine noch zu bestimmende Constante ist. Der Ursprung des Coordinatensystems sei mit A , die Winkel, die Am und Am_1 bezüglich mit der Zaxe einschließen mit φ und φ_1 , endlich der Winkel mAm_1 mit β bezeichnet. Bei diesen Bezeichnungen ergeben sich folgende Relationen:

$$y = r \sin \varphi;$$

$$z = r \cos \varphi;$$

$$y_1 = r \sin \varphi_1 = r \sin(\varphi + \beta);$$

$$z_1 = r \cos \varphi_1 = r \cos(\varphi + \beta).$$

Durch Differentiation nach der Zeit erhalten wir aus ihnen die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dt} = r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\frac{dz}{dt} = -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\frac{dy_1}{dt} = r \cos(\varphi + \beta) \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\frac{dz_1}{dt} = -r \sin(\varphi + \beta) \frac{d\varphi}{dt}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in Gleichung (33) verwandelt sich letztere in:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mr^2 \left(\cos^2 \varphi \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \sin^2 \varphi \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) + \frac{1}{2} m_1 r^2 \left(\cos^2(\varphi + \beta) \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \sin^2(\varphi + \beta) \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) \\ = gr(m \cos \varphi + m_1 \cos(\varphi + \beta)) + C, \end{aligned}$$

oder in die einfachere:

$$\frac{1}{2}r^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} (m + m_1) = gr(m \cos \varphi + m_1 \cos(\varphi + \beta)) + C.$$

Wir wollen für den Winkel φ einen andern veränderlichen Winkel einführen, und zwar denjenigen, den die Verbindungslinie des Schwerpunktes des Systems mit A mit der Zaxe bildet; er heiße vor der Hand ψ . Es werden nun φ und ψ durch die Gleichung: $\varphi = \psi - \vartheta$ zusammenhängen, wenn ϑ den Winkel bedeutet, den jene Verbindungslinie des Schwerpunktes mit A mit der Linie Am bildet. Der Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dt}$ wird hiernach in $\frac{d\psi}{dt}$ übergehen, da ϑ von der Zeit unabhängig ist.

Doch wollen wir den Buchstaben ψ wieder durch φ ersetzen. Man hat demnach:

$$\frac{1}{2}r^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} (m + m_1) = gr \{m \cos(\varphi - \vartheta) + m_1 \cos(\varphi + \beta - \vartheta)\} + C.$$

Der Ausdruck, der in der Klammer auf der rechten Seite steht und den wir vor der Hand mit K bezeichnen wollen, läßt sich wesentlich vereinfachen. Zuerst ist:

$$K = \sin \varphi \{m \sin \vartheta - m_1 \sin(\beta - \vartheta)\} + \cos \varphi \{m \cos \vartheta + m_1 \cos(\beta - \vartheta)\}.$$

Nennen wir ferner die Punkte, in denen sich die Massen m und m_1 in einem gewissen Augenblicke befinden, bezüglich a und a_1 , den auf der Geraden aa_1 liegenden Schwerpunkt e , seinen Abstand von A , l , endlich, wie schon früher, den Winkel aAa_1 , β und den Winkel aAe , ϑ , so ergibt sich aus den Proportionen:

$$m : m_1 = \overline{ea}_1 : \overline{ea}$$

und

$$\overline{ea} : \overline{ea}_1 = \sin \vartheta : \sin(\beta - \vartheta)$$

die Relation:

$$m \sin \vartheta = m_1 \sin(\beta - \vartheta),$$

durch deren Substitution der Werth für K in:

$$\cos \varphi \{m \cos \vartheta + m_1 \cos(\beta - \vartheta)\}$$

übergeht.

Nun hat man aber auch:

$$\cos \vartheta = \frac{r^2 + l^2 - \overline{ae}^2}{2rl}$$

$$\cos(\beta - \vartheta) = \frac{r^2 + l^2 - \overline{ae}_1^2}{2rl}$$

und

$$r^2 - \overline{ae}^2 = l^2 - 2l\overline{ae} \cos(aeA)$$

$$r^2 - \overline{ae}_1^2 = l^2 + 2l\overline{ae}_1 \cos(aeA).$$

Aus der Verbindung von je zwei Gleichungen der beiden Systeme ergibt sich:

$$\cos \vartheta = \frac{l - \bar{a}e \cos(aeA)}{r}$$

$$\cos(\beta - \vartheta) = \frac{l + \bar{a}e \cos(aeA)}{r},$$

und hieraus:

$$m \cos \vartheta + m_1 \cos(\beta - \vartheta) = \frac{ml}{r} + \frac{m_1 l}{r} - \frac{(m \bar{a}e - m_1 \bar{a}e_1) \cos(aeA)}{r},$$

ein Ausdruck, der, weil

$$m \bar{a}e - m_1 \bar{a}e_1 = 0$$

ist, in:

$$m \cos \vartheta + m_1 \cos(\beta - \vartheta) = \frac{(m + m_1)l}{r}$$

übergeht. Hiernach hat man endlich:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2gl}{r^2} \cos \varphi + C,$$

einen Ausdruck, der mit der dynamischen Gleichung (9) vollständig übereinstimmt.

Bis jetzt wirkte auf unser System die Schwere. Würde dasselbe der Wirkung einer nach dem Newton'schen Gesetze wirkenden Kraft unterworfen, so würde sich die Rechnung, wenigstens unter gewissen Voraussetzungen, gleichfalls ausführen lassen; doch müssen wir uns die Ausführung in diesem Programme versagen.

Hahnemann.

Druckfehler.

Seite 6 Zeile 6 von oben schiebe man hinten zwischen die Worte: den Bewegungs-
größen „ m, v, m, v_1 und“ ein.

= 7 = 11 von oben lese man statt $q = 0$: „ $q = 0$ “

= 11 = 5 von unten lese man statt Integrals: „Integrals“

= 14 = 3 von oben setze hinter wollen ein Komma.