7. Sekundärliteratur

Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen der Realschule I. Ordnung im Waisenhause zu Halle am ... in dem Versammlungssaale des neuen ...

Halle (Saale), 1838

1. Das Bildungsgesetz der endlichen summirbaren Reihen.

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Theorie der endlichen summirbaren Reihen.

Die Lehrbücher der Arithmetik behandeln von den endlichen summirbaren Reihen in der Regel nur die arithmetischen Reihen erster Ordnung und die geometrische Reihe; gehen sie weiter, als es gewöhnlich der Fall ist, so nehmen sie noch die figurirten Zahlen, die arithmetischen Reihen höherer Ordnungen und die zusammengesetzte Reihe auf, indem man unter dieser Bezeichnung eine geometrische Reihe versteht, deren einzelnen Gliedern Coefficienten beigegeben sind, welche für sich wieder eine arithmetische Reihe bilden. Jede dieser Reihen wird nach einer ihrer besonderen Natur angemessenen Methode summirt. Es giebt aber eine Methode, welche nicht nur alle genannten Reihen in derselben Weise summiren lehrt, sondern auch den Blick auf alle endlichen summirbaren Reihen eröffnet. Diese Methode ist nicht neu, doch begegnet man ihr sehr selten in den mathematischen Werken. Eine auf diese Methode gegründete Theorie würde außer der reichen Anwendbarkeit ihrer Resultate für den Unterricht den Vortheil bieten, nicht sowohl den Schüler im Gebrauch des Summirungssymbols zu üben, als auch den Blick desselben von einzelnen Beispielen auf ein allgemeines Gebiet zu erweiten. Die nachfolgenden Blätter sollen eine solche Theorie enthalten, über welche dem Verfasser nicht bekannt geworden ist, daß sie sonst schon in diesem Umfange aufgestellt ist.

1. Das Bildungsgesetz der endlichen summirbaren Reihen.

§. 1. Die Reihe. Unter einer Reihe versteht man in der Arithmetik eine geordnete Zusammenstellung von Zahlen, welche nach einem gemeinschaftlichen Gesetz gebildet sind. Jede dieser Zahlen heißt ein Glied der Reihe, und die Zahl, welche die Stellung eines Gliedes in der Reihe angiebt, heißt der Index des Gliedes. Das allgemeine Glied der Reihe oder das Gesetz der Reihe ist der arithmetische Ausdruck, welcher angiebt, wie der Werth jedes Gliedes aus seinem Index gefunden werden kann. Ist die Anzahl der aufeinanderfolgenden Glieder eine endliche, so heißt die Reihe selbst eine endliche Reihe, im anderen Falle eine unendliche Reihe. Läßt sich die Summe einer endlichen Reihe in der Art angeben, daß die Abhängigkeit dieser Summe von der Anzahl der Glieder in einem arithmetischen Ausdruck erscheint, so heißt die Reihe eine summirbare Reihe. Ist eine endliche Reihe summirbar und wird ihre Summe bei unendlicher Fortsetzung der Reihe nicht selbst unendlich, so läßt sich auch die Summe der unendlichen Reihe angeben, denn die unendliche Reihe ist nur ein besonderer Fall der endlichen Reihe. Aus diesem Grunde kann man nicht erwarten, daß eine Reihe, deren Summe angebbar ist, wenn sie unendlich lang genommen wird, auch als endliche Reihe summirbar sein wird.

§. 2. Die Funktion. Unter Funktion einer unbestimmten Zahl x versteht man einen arithmetischen Ausdruck, in welchem das unbestimmte Zahlzeichen x vorkommt und dessen Werth bedingt wird durch den besonderen Werth, welchen man dem Zeichen x beilegt. Dergleichen Funktionen pflegt man durch die Symbole f_x, F_x, φ_x, ψ_x u. dergl. zu bezeichnen. Ist f_x irgend eine gegebene Funktion, so bezeichnen die Formen f_{x-1}, f_n, f_0 diejenigen Werthe dieser Funktion, die man erhält, wenn man $x-1$ oder n oder 0 an die Stelle von x in der gegebenen Funktion setzt. Die Zahl x heißt das Argument der Funktion. Die Funktion selbst heißt eine ganze, gebrochene oder irrationale, je nachdem das Argument nur mit positiven ganzen Exponenten oder im Nenner von Brüchen oder unter einem Wurzelzeichen vorkommt. Kommt das Argument im Potenzexponenten vor oder in logarithmischen oder goniometrischen Ausdrücken, so heißt die Funktion transcendent.

§. 3. Das Summirungssymbol. Mit einem der beiden Zeichen

$$\sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} \quad \text{oder} \quad \sum_{x=1}^{x=n}\left(f_x\right)$$

wird die Summe derjenigen n Glieder einer Reihe bezeichnet, die man erhält, wenn man in der Funktion f_x an die Stelle des Arguments x der Reihe nach die natürlichen Zahlen von 1 bis n setzt. Im Allgemeinen werde unter der Voraussetzung $m < n$ durch

$$\sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\m \div n}} \quad \text{oder} \quad \sum_{x=m}^{x=n}\left(f_x\right)$$

die Summe der Reihe bezeichnet, die man erhält, wenn man in f_x statt x der Reihe nach die natürlichen Zahlen von m bis n setzt.

§. 4. Rechnung mit dem Summirungssymbol. Aus der Bedeutung des Summirungssymbols ergeben sich sofort folgende Umformungsformeln:

$$1)\ \sum\left(f_x \pm \varphi_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} = \sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} \pm \sum\left(\varphi_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}}$$

$$2)\ \sum\left(af_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} = a\sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}}$$

$$3)\ \sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} = \sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div (m-1)}} + \sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\m \div n}},\ \text{wenn } m < n.$$

Diese drei Gleichungen drücken in symbolischer Form nichts weiter aus, als die einfachen Sätze: 1) daß in einer mehrgliedrigen Summe die Glieder beliebig geordnet werden können; 2) daß eine Summe von Produkten, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, gleich dem Produkte des gemeinschaftlichen Factors mit der Summe der nicht gemeinschaftlichen Factoren ist; und 3) daß jede Reihe in zwei Reihen zerfällt, wenn man zunächst die Anfangsglieder bis zu einem bestimmten Gliede zusammen nimmt und sodann die übrigen Glieder. In einem besonderen Falle nimmt die dritte Gleichung die Form:

$$4)\ \sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} = \sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div (n-1)}} + f_n \text{ an.}$$

§. 5. Das Bildungsgesetz der endlichen summirbaren Reihen.

1) Es ist ganz allgemein: $\sum\left(f_x - f_{x-1}\right)_{\substack{x\\1 \div n}} = f_n - f_0$.

Beweis. Die Richtigkeit dieser eigentlich nur tautologischen Gleichung erhellt sofort, wenn man die linke Seite ihrer symbolischen Form entkleidet. Dieselbe erscheint dann in folgender Gestalt:

$$(f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) \cdots + (f_{n-1} - f_{n-2}) + (f_n - f_{n-1}).$$

Da jeder Subtrahendus eines späteren Gliedes sich mit dem Minuendus des vorhergehenden aufhebt, so ergiebt sich als Summe der ganzen Reihe der Werth $f_n - f_0$.

Will man die Entwickelung der obigen Formel nachweisen, so beachte man, daß die allgemeine Funktion f_n nur dann die Summe einer Reihe von n Gliedern darstellen kann, wenn ihr Werth für $n = 0$ verschwindet, denn die Summe einer Reihe von 0 Gliedern muß selbst gleich Null sein. Hat nun f_n diese Eigenschaft nicht, so findet sich diese Eigenschaft doch bei $f_n - f_0$, folglich kann jeder Ausdruck von dieser Form die Summe einer n-gliedrigen Reihe sein. Bezeichnen wir mit φ_x das allgemeine Glied dieser Reihe, so ist

$$\sum\left(\varphi_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} = f_n - f_0.$$

Nehmen wir diese Reihe nur vom ersten bis (n—1)ten Gliede, so haben wir

$$\sum\left(\varphi_x\right)_{\substack{x\\1 \div (n-1)}} = f_{n-1} - f_0.$$

Subtrahiren wir beide Gleichungen, so folgt:

$$\varphi_n = f_n - f_{n-1}$$

oder, wenn x an die Stelle von n gesetzt wird:

$$\varphi_x = f_x - f_{x-1}.$$

Die Substitution dieses Werthes in die obige Gleichung giebt:

$$\sum\left(f_x - f_{x-1}\right)_{\substack{x\\1\div n}} = f_n - f_0 .$$

2) In ähnlicher Art kann man beweisen, daß

$$\sum\left(f_{x+1} - f_x\right)_{\substack{x\\1\div n}} = f_{n+1} - f_1 .$$

und

$$\sum\left(f_{x+1} - f_{x-1}\right)_{\substack{x\\1\div n}} = f_{n+1} + f_n - f_1 - f_0 .$$

3) Ganz allgemein erhält man, wenn auch r eine positive ganze Zahl ist:

$$\sum\left(f_{x+r-1} - f_{x-1}\right) = f_{n+r-1} + f_{n+r-2} \cdots + f_n - (f_{r-1} + f_{r-2} + \cdots f_0).$$

§. 6. *Folgerung.* Aus der Allgemeinheit der in §. 5 aufgestellten Gleichung folgt nun sofort:

In jeder endlichen summirbaren Reihe muß sich das allgemeine Glied als die Differenz zweier gleichartigen Funktionen, deren allgemeine Argumente um die Einheit oder sonst um eine ganze Zahl unterschieden sind, darstellen lassen.

Ist das allgemeine Glied φ_x gegeben, so ist die Reihe summirbar und die Summe sofort angebbar, wenn man φ_x in die Form $f_x - f_{x-1}$ oder $f_{x+r} - f_x$ umformen kann. Diese Umformung ist nicht immer möglich, und wo sie möglich ist, meist schwer aufzufinden, so daß die Summirung in dieser Weise meist auf ein Probiren hinausliefe. Geht man aber von der Funktion f_x aus, so ergiebt sich das allgemeine Glied φ_x der dann stets summirbaren Reihe sehr leicht, aus welcher sich mit Hülfe der Regeln in §. 4 oft andere Reihen ableiten lassen. Führt man für f_x der Reihe nach die verschiedenen Funktionen ein, so erhält man daraus die entsprechenden summirbaren Reihen.

2. Summirung der Werthe ganzer Funktionen.

§. 7. *Potenzreihen.* Um abzukürzen, wollen wir das Zeichen $\sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\1\div n}}$ unter der Voraussetzung, daß die Summirung für die Werthe von 1 bis n vorgenommen wird, künftig $\Sigma\,(f_x)$ schreiben. Hiernach schreibt sich die Gleichung des §. 5 in folgender Weise:

$$\Sigma\,(f_x - f_{x-1}) = f_n' - f_0 .$$

Diese Gleichung liegt den folgenden Entwickelungen zu Grunde.