

7. Sekundärliteratur

**Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen
der Realschule I. Ordnung im Waisenhaus zu Halle am ...
in dem Versammlungssaale des neuen ...**

Halle (Saale), 1838

2. Summirung der Werthe ganzer Funktionen.

Nutzungsbedingungen

Die Digitalisate des Francke-Portals sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen für wissenschaftliche und private Zwecke heruntergeladen und ausgedruckt werden. Vorhandene Herkunftsbezeichnungen dürfen dabei nicht entfernt werden.

Eine kommerzielle oder institutionelle Nutzung oder Veröffentlichung dieser Inhalte ist ohne vorheriges schriftliches Einverständnis des Studienzentrums August Hermann Francke der Franckeschen Stiftungen nicht gestattet, das ggf. auf weitere Institutionen als Rechteinhaber verweist. Für die Veröffentlichung der Digitalisate können gemäß der Gebührenordnung der Franckeschen Stiftungen Entgelte erhoben werden.

Zur Erteilung einer Veröffentlichungsgenehmigung wenden Sie sich bitte an die Leiterin des Studienzentrums, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

Terms of use

All digital documents of the Francke-Portal are protected by copyright. They may be downloaded and printed only for non-commercial educational, research and private purposes. Attached provenance marks may not be removed.

Commercial or institutional use or publication of these digital documents in printed or digital form is not allowed without obtaining prior written permission by the Study Center August Hermann Francke of the Francke Foundations which can refer to other institutions as right holders. If digital documents are published, the Study Center is entitled to charge a fee in accordance with the scale of charges of the Francke Foundations.

For reproduction requests and permissions, please contact the head of the Study Center, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Die Substitution dieses Werthes in die obige Gleichung giebt:

$$\sum (f_x - f_{x-1})_{1-\frac{x}{n}} = f_n - f_0.$$

2) In ähnlicher Art kann man beweisen, daß

$$\sum (f_{x+1} - f_x)_{1-\frac{x}{n}} = f_{n+1} - f_1.$$

und

$$\sum (f_{x+1} - f_{x-1})_{1-\frac{x}{n}} = f_{n+1} + f_n - f_1 - f_0.$$

3) Ganz allgemein erhält man, wenn auch r eine positive ganze Zahl ist:

$$\sum (f_{x+r-1} - f_{x-1}) = f_{n+r-1} + f_{n+r-2} \cdots + f_n - (f_{r-1} + f_{r-2} + \cdots + f_0).$$

§. 6. Folgerung. Aus der Allgemeinheit der in §. 5 aufgestellten Gleichung folgt nun sofort:

In jeder endlichen summirbaren Reihe muß sich das allgemeine Glied als die Differenz zweier gleichartigen Funktionen, deren allgemeine Argumente um die Einheit oder sonst um eine ganze Zahl unterschieden sind, darstellen lassen.

Ist das allgemeine Glied q_x gegeben, so ist die Reihe summirbar und die Summe sofort angebar, wenn man q_x in die Form $f_x - f_{x-1}$ oder $f_{x+r} - f_x$ umformen kann. Diese Umformung ist nicht immer möglich, und wo sie möglich ist, meist schwer aufzufinden, so daß die Summirung in dieser Weise meist auf ein Probiren hinausläufe. Geht man aber von der Funktion f_x aus, so ergibt sich das allgemeine Glied q_x der dann stets summirbaren Reihe sehr leicht, aus welcher sich mit Hilfe der Regeln in §. 4 oft andere Reihen ableiten lassen. Führt man für f_x der Reihe nach die verschiedenen Funktionen ein, so erhält man daraus die entsprechenden summirbaren Reihen.

2. Summirung der Werthe ganzer Funktionen.

§. 7. Potenzreihen. Um abzukürzen, wollen wir das Zeichen $\sum (f_x)_{1-\frac{x}{n}}$ unter der Voraussetzung, daß die Summirung für die Werthe von 1 bis n vorgenommen wird, künftig $\Sigma (f_x)$ schreiben. Hiernach schreibt sich die Gleichung des §. 5 in folgender Weise:

$$\Sigma (f_x - f_{x-1}) = f_n' - f_0.$$

Diese Gleichung liegt den folgenden Entwicklungen zu Grunde.

1) Der einfachste Fall ist $f_x = x$, dann ist $f_x - f_{x-1} = x - (x-1) = 1$, und es folgt dann nach §. 5, 1

$$\Sigma(1) = n.$$

$\Sigma(1)$ bezeichnet eine Reihe von n Gliedern, von denen ein jedes gleich 1 ist, ihre Summe ist also n .

Setzt man $f_x = ax$, so folgt $\Sigma(a) = na$.

2) Ist $f_x = x^2$, so ist $f_x - f_{x-1} = x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$, folglich ist:

$$\Sigma(2x-1) = n^2.$$

Behandeln wir die linke Seite der Gleichung nach §. 4, 1, 2, so ist

$$2\Sigma(x) - \Sigma(1) = n^2, \text{ oder}$$

$$\Sigma(x) = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \text{ Es ist also:}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3) Ist $f_x = x^3$, so ist $f_x - f_{x-1} = 3x^2 - 3x + 1$ also:

$$\Sigma(3x^2 - 3x + 1) = n^3, \text{ oder nach §. 4, 1. 2 ist}$$

$$3\Sigma(x^2) - 3\Sigma(x) + \Sigma(1) = n^3.$$

Substituiert man für $\Sigma(1)$ und $\Sigma(x)$ die gefundenen Werthe, so folgt

$$3\Sigma(x^2) = n^3 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}, \text{ also:}$$

$$\Sigma(x^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}. \text{ Es ist also:}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}.$$

4) Ist $f_x = x^4$, so ist $f_x - f_{x-1} = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$, also:

$$\Sigma(4x^3 - 6x^2 + 4x - 1) = n^4, \text{ oder}$$

$$4\Sigma(x^3) - 6\Sigma(x^2) + 4\Sigma(x) - \Sigma(1) = n^4.$$

Da $\Sigma(1)$, $\Sigma(x)$, $\Sigma(x^2)$ bekannte Werthe sind, so ergibt sich nach einiger Umformung:

$$\Sigma(x^3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \text{ Es ist also:}$$

$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

5) So kann man die Summen der höheren Potenzreihen finden, nachdem man zuvor die Summen der niedrigeren Potenzreihen gefunden hat. Es läßt sich aber für dieses recurrende Verfahren auch ein allgemeiner Ausdruck aufstellen. Es sei $f_x = x^m$,

so ist $f_x - f_{x-1} = x^m - (x-1)^m$. Entwickelt man nach der binomischen Reihe und bezeichnet man mit $\mathfrak{B}_r^m$ den r ten Binominalcoefficienten der m ten Potenz, so folgt

$$\Sigma[\mathfrak{B}_1^m x^{m-1} - \mathfrak{B}_2^m x^{m-2} + \mathfrak{B}_3^m x^{m-3} \dots - (-1)^r \mathfrak{B}_r^m x^{m-r} \dots] = n^m,$$

folglich ist

$$\Sigma(x^{m-1}) = [n^m + \mathfrak{B}_2^m \Sigma(x^{m-2}) - \mathfrak{B}_3^m \Sigma(x^{m-3}) \dots + (-1)^r \mathfrak{B}_r^m \Sigma(x^{m-r}) \dots] : \mathfrak{B}_1^m.$$

Setzt man hier beispielsweise $m = 5$, so folgt:

$$\Sigma(x^4) = [n^5 + 10 \Sigma(x^3) - 10 \Sigma(x^2) + 5 \Sigma(x) - \Sigma(1)] : 5,$$

oder nach ausgeführter Substitution:

$$\Sigma(x^4) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 5}. \text{ Es ist also:}$$

$$1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 5}.$$

6) Eine noch brauchbarere allgemeine Formel erhält man, wenn man die Gleichung

$$\Sigma(f_{x+1} - f_{x-1}) = f_{n+1} + f_n - f_1 - f_0$$

zu Grunde legt. Setzt man $f_x = x^m$ und entwickelt $(x+1)^m - (x-1)^m$ nach dem binomischen Lehrsatz, so folgt

$$2 \Sigma[\mathfrak{B}_1^m x^{m-1} + \mathfrak{B}_3^m x^{m-3} + \mathfrak{B}_5^m x^{m-5} \dots] = (n+1)^m + n^m - 1,$$

folglich ist

$$\Sigma(x^{m-1}) = [(n+1)^m + n^m - 1 - 2 \mathfrak{B}_3^m \Sigma(x^{m-3}) - 2 \mathfrak{B}_5^m \Sigma(x^{m-5}) - \dots] : 2 \mathfrak{B}_1^m.$$

Diese Formel giebt für $n = 5$ die Rechnung

$$\Sigma(x^4) = [(n+1)^5 + n^5 - 1 - 20 \Sigma(x^2) - 2 \Sigma(1)] : 10.$$

Die weitere Ausführung führt zu dem schon oben angegebenen Resultat.

7) Man kann auf die Summierung der allgemeinen Potenzreihe noch ein allgemeines Verfahren anwenden. Entwickelt man in dem vorhin für $(n+1)^m + n^m - 1$ aufgestellten Ausdruck die Potenz $(n+1)^m$ nach der Binominalreihe, so ist:

$$2 \mathfrak{B}_1^m \Sigma(x^{m-1}) + 2 \mathfrak{B}_3^m \Sigma(x^{m-3}) + 2 \mathfrak{B}_5^m \Sigma(x^{m-5}) + \dots =$$

$$2n^m + \mathfrak{B}_1^m n^{m-1} + \mathfrak{B}_2^m n^{m-2} + \mathfrak{B}_3^m n^{m-3} + \mathfrak{B}_4^m n^{m-4} + \mathfrak{B}_5^m n^{m-5} \dots + \mathfrak{B}_{m-1}^m n.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung, wenn sie entwickelt ist, mit der rechten Seite identisch werden muß, so folgt, daß $2n^m$ das erste Glied der Entwicklung von $2 \mathfrak{B}_1^m \Sigma(x^{m-1})$ sein muß, und da das erste Glied der Entwicklung von $2 \mathfrak{B}_3^m \Sigma(x^{m-3})$ nicht höher als n^{m-2} sein kann, so ist $\mathfrak{B}_1^m n^{m-1}$, das zweite Glied unserer rechten Seite,

das zweite Glied der Entwicklung von $2\mathcal{B}_1^m \Sigma(x^{m-1})$; da nun $\mathcal{B}_1^m = m$ ist, so folgt für die ersten zwei Glieder der Entwicklung von $\Sigma(x^{m-1})$:

$$\Sigma(x^{m-1}) = \frac{n^m}{m} + \frac{1}{2} n^{m-1} + \dots$$

die späteren Glieder vom dritten ab sind zur Zeit noch unbestimmt. Hieraus folgt nun weiter:

$$\Sigma(x^{m-3}) = \frac{n^{m-2}}{m-2} + \frac{1}{2} n^{m-3} + \dots$$

$$\Sigma(x^{m-5}) = \frac{n^{m-4}}{m-4} + \frac{1}{2} n^{m-5} + \dots \text{ u. f. f.}$$

Das zweite Glied der Entwicklung von $2\mathcal{B}_3^m \Sigma(x^{m-3})$ ist demnach $2\mathcal{B}_3^m \cdot \frac{1}{2} n^{m-3} = \mathcal{B}_3^m n^{m-3}$ und hebt sich mit dem 4. Gliede der rechten Seite; da nun auf der rechten Seite die Potenz n^{m-3} nicht weiter vorkommt, so kann sie auch der linken Seite nicht weiter vorkommen, d. h. in der Entwicklung von $\Sigma(x^{m-1})$ fehlt die Potenz n^{m-3} . Ebenso fehlt auch in der Entwicklung von $\Sigma(x^{m-3})$ die Potenz n^{m-5} . Das zweite Glied der Entwicklung von $2\mathcal{B}_5^m \Sigma(x^{m-5})$ ist $2\mathcal{B}_5^m \cdot \frac{1}{2} n^{m-5} = \mathcal{B}_5^m n^{m-5}$ und hebt sich mit dem sechsten Gliede der rechten Seite, und da sonst hier das Glied n^{m-5} sich nicht vorfindet, so kann es sich auch nicht in der Entwicklung von $\Sigma(x^{m-1})$ vorfinden. In dieser Art folgert man weiter, daß in dieser Entwicklung auch die Glieder n^{m-7} , n^{m-9} ... nicht vorkommen können.

Diese Entwicklung hat also die Form:

$$\Sigma(x^{m-1}) = \frac{n^m}{m} + \frac{1}{2} n^{m-1} + a_{m-2} n^{m-2} + a_{m-4} n^{m-4} + a_{m-6} n^{m-6} \dots$$

Diese Reihe schließt ab mit $a_2 n^2$ oder $a_1 n$, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die Coefficienten a_{m-2} , a_{m-4} ... sind zur Zeit noch unbestimmt.

Wir legen nun diese Form zu Grunde und setzen allgemein

$$f_x = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + a_{m-3} x^{m-3} + a_{m-4} x^{m-4} + \dots$$

Entwickeln wir nun mit Hilfe der Binominalreihe den Ausdruck $f_x - f_{x-1}$, so folgt aus unserer allgemeinen Summirungsformel:

$$\begin{aligned} \Sigma[\mathcal{B}_1^m a_m x^{m-1} - (\mathcal{B}_2^m a_m - \mathcal{B}_1^{m-1} a_{m-1}) x^{m-2} + (\mathcal{B}_3^m a_m - \mathcal{B}_2^{m-1} a_{m-1} + \mathcal{B}_1^{m-2} a_{m-2}) x^{m-3} \\ - (\mathcal{B}_4^m a_m - \mathcal{B}_3^{m-1} a_{m-1} + \mathcal{B}_2^{m-2} a_{m-2} - \mathcal{B}_1^{m-3} a_{m-3}) x^{m-4} + \dots] \\ = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + a_{m-2} n^{m-2} + a_{m-3} n^{m-3} + \dots + a_1 n. \end{aligned}$$

Setzt man den Ausdruck unter dem Summenzeichen auf der linken Seite gleich x^{m-1} , so folgen zur Bestimmung der Coefficienten $a_m, a_{m-1} \dots a_1$ gerade so viel Gleichungen, als Unbekannte da sind. Die erste Gleichung ist $B_1^m a_m = 1$, die übrigen Gleichungen erhält man, wenn man den Inhalt jeder runden Klammer der Null gleich setzt. Da wir aber schon wissen, daß für $\Sigma(x^{m-1})$ die Coefficienten $a_{m-3}, a_{m-5}, a_{m-7} \dots$ verschwinden, so kann man sie aus diesen Bestimmungsgleichungen weglassen und man hebt dann aus diesen Gleichungen nur so viele heraus, als nöthig sind, und zwar nimmt man dazu die einfachsten. Diese Bestimmungsgleichungen sind demnach:

$$B_1^m a_m = 1$$

$$B_2^m a_m - B_1^{m-1} a_{m-1} = 0$$

$$B_3^m a_m - B_2^{m-1} a_{m-1} + B_1^{m-2} a_{m-2} = 0$$

$$B_5^m a_m - B_4^{m-1} a_{m-1} + B_3^{m-2} a_{m-2} + B_1^{m-4} a_{m-4} = 0$$

$$B_7^m a_m - B_6^{m-1} a_{m-1} + B_5^{m-2} a_{m-2} + B_3^{m-4} a_{m-4} + B_1^{m-6} a_{m-6} = 0.$$

Die allgemeine Form dieser Gleichungen von der dritten ab ist:

$$B_{2r+1}^m a_m - B_{2r}^{m-1} a_{m-1} + B_{2r-1}^{m-2} a_{m-2} + B_{2r-3}^{m-4} a_{m-4} + \dots + B_1^{m-2r} a_{m-2r} = 0.$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe vom dritten ab ist:

$$B_{2r-2s+1}^{m-2s} a_{m-2s}.$$

Der Coefficient des letzten Gliedes $B_1^{m-2r} = m-2r$ ist Factor aller vorhergehenden Coefficienten; theilt man die ganze Gleichung durch ihn, so erhält man:

$$\frac{B_{2r+1}^m a_m}{2r+1} - \frac{B_{2r}^{m-1} a_{m-1}}{2r} + \frac{B_{2r-1}^{m-2} a_{m-2}}{2r-1} + \frac{B_{2r-3}^{m-4} a_{m-4}}{2r-3} + \dots$$

$$+ \frac{B_{2r-2s+1}^{m-2s} a_{m-2s}}{2r-2s+1} + \dots + a_{m-2r} = 0.$$

Nun folgt aus der Theorie der Binominalcoefficienten:

$$B_{2r-2s}^{m-2s} \cdot B_{2s}^m = B_{2r}^m \cdot B_{2s}^{2r}.$$

Substituirt man hieraus den Werth

$$B_{2r-2s}^{m-2s} = \frac{B_{2r}^m \cdot B_{2s}^{2r}}{B_{2s}^m}$$

in das allgemeine Glied der letzten Reihe, so geht dieses über in

$$\frac{B_{2r}^m B_{2s}^{2r}}{2r-2s+1} \cdot \frac{a_{m-2s}}{B_{2s}^m},$$

und da $\frac{B_{2s}^{2r}}{2r-2s+1} = \frac{B_{2s-1}^{2r}}{2s}$ ist, so läßt sich dieses allgemeine Glied auch in dieser Form schreiben:

$$\frac{B_{2r}^m B_{2s-1}^{2r}}{2s} \cdot \frac{a_{m-2s}}{B_{2s}^m}.$$

In gleicher Weise ergibt sich, daß $\frac{B_{2r-1}^{m-1}}{2r} = \frac{B_{2r}^m}{B_1^m}$. Macht man von diesen Umformungen Gebrauch, so geht die allgemeine Form der Bestimmungsgleichungen von der dritten ab über in:

$$\begin{aligned} \frac{B_{2r}^m a_m}{2r+1} - \frac{B_{2r}^m a_{m-1}}{B_1^m} + \frac{B_{2r}^m B_1^{2r}}{2} \cdot \frac{a_{m-2}}{B_2^m} + \frac{B_{2r}^m B_3^{2r}}{4} \cdot \frac{a_{m-4}}{B_4^m} + \dots \\ + \frac{B_{2r}^m B_{2s-1}^{2r}}{2s} \cdot \frac{a_{m-2s}}{B_{2s}^m} + \dots + a_{m-2r} = 0. \end{aligned}$$

Alle Glieder der Reihe mit Ausnahme des letzten haben den Faktor B_{2r}^m gemein, dividiren wir die Gleichung durch denselben, so finden wir zur recurrirenden Bestimmung des Quotienten $\frac{a_{m-2r}}{B_{2r}^m}$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{a_{m-2r}}{B_{2r}^m} = -\frac{a_m}{2r+1} + \frac{a_{m-1}}{B_1^m} - \frac{B_1^{2r}}{2} \cdot \frac{a_{m-2}}{B_2^m} - \frac{B_3^{2r}}{4} \cdot \frac{a_{m-4}}{B_4^m} - \dots \\ - \frac{B_{2s-1}^{2r}}{2s} \cdot \frac{a_{m-2s}}{B_{2s}^m} - \dots - \frac{B_{2r-3}^{2r}}{2(r-1)} \cdot \frac{a_{m-2r+2}}{B_{2r-2}^m}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Bestimmungsgleichungen liefern für a_m und a_{m-1} die bekannten Werthe:

$$a_m = \frac{1}{m}, \quad a_{m-1} = \frac{1}{2}$$

Setzen wir diese Werthe ein, ziehen die ersten beiden Glieder der rechten Seite zusammen und multipliciren dann die ganze Gleichung mit m , so folgt:

$$\frac{m a_{m-2r}}{B_{2r}^m} = \frac{2r-1}{2(2r+1)} - \frac{B_1^{2r}}{2} \cdot \left(\frac{m a_{m-2}}{B_2^m} \right) - \frac{B_3^{2r}}{4} \cdot \left(\frac{m a_{m-4}}{B_4^m} \right) \dots$$

$$- \frac{B_{2s-1}^{2r}}{2s} \cdot \left(\frac{m a_{m-2s}}{B_{2s}^m} \right) - \dots - \frac{B_{2r-3}^{2r}}{2(r-1)} \cdot \left(\frac{m a_{m-2r+2}}{B_{2r-2}^m} \right).$$

Die Quotienten $\frac{m a_{m-2}}{B_2^m}$, $\frac{m a_{m-4}}{B_4^m}$, $\frac{m a_{m-6}}{B_6^m}$, ..., $\frac{m a_{m-2r}}{B_{2r}^m}$ sind unter dem Namen der Bernoullischen Zahlen bekannt, bezeichnen wir sie der Kürze wegen mit $B_1, B_2, B_3 \dots B_r$, so hat sich uns also zur recurrenden Bestimmung der Bernoullischen Zahlen folgende Gleichung ergeben:

$$B_r = \frac{2r-1}{2(2r+1)} - \frac{B_1^{2r}}{2} \cdot B_1 - \frac{B_3^{2r}}{4} B_2 - \frac{B_5^{2r}}{6} B_3 \dots - \frac{B_{2r-3}^{2r}}{2(r+1)} \cdot B_{r-1}.$$

Setzt man für r der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3, 4 ... ein, so erhält man nach einander:

$$B_1 = \frac{1}{6}$$

$$B_2 = \frac{3}{2 \cdot 5} - \frac{4}{2} B_1 = -\frac{1}{30}$$

$$B_3 = \frac{5}{2 \cdot 7} - \frac{6}{2} B_1 - \frac{20}{4} B_2 = \frac{5}{14} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

$$B_4 = \frac{7}{2 \cdot 9} - \frac{8}{2} B_1 - \frac{56}{4} B_2 - \frac{56}{6} B_3 = \frac{7}{18} - \frac{2}{3} + \frac{7}{15} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{30}$$

$$B_5 = \frac{9}{2 \cdot 11} - \frac{10}{2} B_1 - \frac{120}{4} B_2 - \frac{252}{6} B_3 - \frac{120}{8} B_4 = \frac{9}{22} - \frac{5}{6} + 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{66}.$$

Sind die Bernoullischen Zahlen gefunden, so folgen die Coefficienten für die Summe der allgemeinen Potenzreihe sofort; es ist

$$a_{m-2} = \frac{B_2^m}{m} B. = \frac{B_1^{m-1}}{2} B_1$$

$$a_{m-4} = \frac{B_4^m B_1}{m} = \frac{B_3^{m-1}}{4} B_2$$

$$a_{m-6} = \frac{\mathfrak{B}_6^m B_3}{m} = \frac{\mathfrak{B}_6^{m-1}}{6} B_3$$

$$a_{m-2r} = \frac{\mathfrak{B}_{2r}^m B_r}{m} = \frac{\mathfrak{B}_{2r}^{m-1}}{2r} B_r$$

$$\Sigma(x^{m-1}) = \frac{n^m}{m} + \frac{n^{m-1}}{2} + \frac{\mathfrak{B}_2^m}{m} B_1 n^{m-2} + \frac{\mathfrak{B}_4^m}{m} B_2 n^{m-4} \dots \frac{\mathfrak{B}_{2r}^m}{m} B_r n^{m-2r} \dots$$

$$= \frac{n^m}{m} + \frac{n^{m-1}}{2} + \frac{\mathfrak{B}_2^{m-1}}{2} B_1 n^{m-2} + \frac{\mathfrak{B}_4^{m-1}}{4} B_2 n^{m-4} \dots \frac{\mathfrak{B}_{2r}^{m-1}}{2r} B_r n^{m-2r} \dots$$

Die Reihe schließt entweder mit n^2 oder n .*)

Setzt man hier nach einander für m die Werthe 6, 7, 8 ..., so folgt:

$$\Sigma(x^5) = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{5n^2}{60} = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{3 \cdot 4}$$

$$\Sigma(x^6) = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{6 \cdot 7}$$

$$\Sigma(x^7) = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^4 + \frac{1}{12} n^2 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

8) Handelt es sich nicht um Summierung einfacher Potenzreihen, sondern ist das allgemeine Glied eine beliebige ganze Funktion des Index, so kann man diese entweder in ihre Potenzglieder auflösen und dann gliedweise summieren, oder man wendet die in voriger Nummer gebrauchte Methode der unbestimmten Coefficienten an und beachtet dabei die bei den Potenzreihen gemachte Erfahrung, daß der Grad des Summenausdrucks um eine Einheit höher ist, als der Grad des allgemeinen Gliedes. Soll z. B. $\Sigma[(2x-1)(3x-2)(4x-3)]$ gefunden werden, so kann man in folgender Art rechnen:

$$\Sigma[(2x-1)(3x-2)(4x-3)] = \Sigma(24x^3 - 46x^2 + 29x - 6) = 24 \Sigma(x^3) - 46 \Sigma(x^2)$$

*) Schon Bernoulli zeigte, daß aus dieser Reihe, nachdem ihre Form feststeht, eine Formel zur recurrenden Bestimmung der Bernoullischen Zahlen abgeleitet werden kann. Setzt man nämlich $n = 1$, so erhält man

$$1 = \frac{1}{m} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{B}_1^{m-1}}{2} B_1 + \frac{\mathfrak{B}_3^{m-1}}{4} B_2 + \frac{\mathfrak{B}_5^{m-1}}{6} B_3 + \dots$$

Hier muß man entweder für m eine ungerade Zahl nehmen, oder im anderen Falle das letzte Glied, das der Potenz n^0 entsprechen würde, weglassen. Setzt man $m = 2r + 1$, so geht diese Gleichung in die oben selbständig abgeleitete über.

+ 29 $\Sigma(x) - 6 \Sigma(1)$. Für die Potenzsummen setze man dann die bekannten Werthe ein. Die andere Rechnungsart geht von der Reflexion aus, daß im gegebenen Falle der Summenausdruck vom 4. Grade ist. Setzt man

$$f_x = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x,$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \Sigma(f_x - f_{x-1}) &= \Sigma[4a_4 x^3 - (6a_4 - 3a_3)x^2 + (4a_4 - 3a_3 + 2a_2)x - (a_4 - a_3 + a_2 - a_1)] \\ &= a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n. \end{aligned}$$

Vergleichen wir hier den Ausdruck unter dem Summenzeichen mit dem gegebenen allgemeinen Gliede der zu summirenden Reihe, so erhält man zur Bestimmung der unbestimmten Coefficienten die Gleichungen:

$$4a_4 = 24$$

$$6a_4 - 3a_3 = 46$$

$$4a_4 - 3a_3 + 2a_2 = 29$$

$$a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 6.$$

Hieraus folgt: $a_4 = 6$, $a_3 = -\frac{10}{3}$, $a_2 = -\frac{5}{2}$, $a_1 = \frac{5}{6}$; also ist

$$\begin{aligned} \Sigma[(2x-1)(3x-2)(4x-3)] &= 6n^4 - \frac{10}{3}n^3 - \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \\ &= \frac{n(36n^3 - 20n^2 - 15n + 5)}{6}. \end{aligned}$$

9) Die Potenzreihen, unendlich lang gedacht, geben eine unendlich große Summe, aber das Verhältniß der Summe einer Potenzreihe zu der um eins höheren Potenz des letzten Index geht einem sehr einfachen Grenzwerthe entgegen, wenn n ohne Ende wächst. Dividirt man den vorhin für $\Sigma_1^n (x^{m-1})$ gefundenen Werth durch n^m und läßt dann n bis ∞ wachsen, so verschwinden zuletzt die späteren Glieder des Summenwerthes, da sie n im Nenner enthalten, und es bleibt

$$\left[\frac{\Sigma_1^n (x^{m-1})}{n^m} \right]_{n=\infty} = \frac{1}{m}.$$

Hiernach ist für ein unendlich großes n :

$$\frac{\Sigma(x)}{n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\Sigma(x^2)}{n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\Sigma(x^3)}{n^4} = \frac{1}{4} \text{ u. f. f.}$$

§. 8. Arithmetische Reihen. 1) Wir wollen das Produkt der k aufeinanderfolgenden Zahlen $x, x+1, x+2, \dots, x+k-1$ der Kürze wegen mit $x^{k|}$ bezeichnen und das Produkt der Zahlen $1, 2, 3, \dots, k$ mit $k!$. In Uebereinstimmung damit würde $x^{k|-1}$ das Produkt der k Zahlen $x, x-1, x-2, \dots, x-k+1$ bezeichnen; allgemein wollen wir mit $a^{k|b}$ das Produkt der k Faktoren $a, a+b, a+2b, a+3b, \dots, a+(k-1)b$ bezeichnen, von denen a der erste, jeder folgende aber um b größer als der vorhergehende ist. Setzen wir nun $f_x = \frac{x^{k|1}}{k!}$, so ist $f_{x-1} = \frac{(x-1)^{k|1}}{k!}$

und $f_x - f_{x-1} = \frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}$. Es folgt also nach §. 5, 1 sofort:

$$\Sigma \left(\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!} \right) = \frac{x^{k|1}}{k!}.$$

Setzen wir der Reihe nach für k die Werthe $1, 2, 3, \dots$ und lösen dabei die Abkürzungssymbole wieder auf, so folgt:

$$\Sigma(x) = \frac{n^{2|1}}{2!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Sigma \left[\frac{x(x+1)}{2} \right] = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^{3|1}}{3!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3}.$$

$$\Sigma \left[\frac{x(x+1)(x+2)}{2 \cdot 3} \right] = 1 + 4 + 10 + 20 + \dots = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

$$\begin{aligned} \Sigma \left[\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right] &= 1 + 5 + 15 + 35 + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Setzt man } f_x = \frac{x^{k|-1}}{k!}, \text{ so ist } f_x - f_{x-1} = \frac{x^{k|-1} - (x-1)^{k|-1}}{k!} = \frac{(x-1)^{k-1|1}}{(k-1)!},$$

also ist:

$$\Sigma \left[\frac{(x-1)^{k-1|1}}{(k-1)!} \right] = \frac{n^{k|-1}}{k!}. \text{ Setzt man für } k \text{ die Werthe } 1, 2, 3, 4, \text{ so folgt}$$

$$\sum (x-1) = 0+1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\sum \frac{(x-1)(x-2)}{2} = 0+0+1+3+6+\dots+\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}.$$

$$\begin{aligned} \sum \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} &= 0+0+0+1+4+\dots+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}. \end{aligned}$$

3) Eine arithmetische Reihe erster Ordnung ist eine Reihe, bei welcher die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder gleich sind; eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung ist eine Reihe, bei welcher die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine Reihe erster Ordnung bilden. Ueberhaupt ist eine arithmetische Reihe k ter Ordnung eine Reihe, bei welcher die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine arithmetische Reihe $(k-1)$ ter Ordnung bilden. Diese Reihe heisst die erste Differenzreihe jener und bildet man von ihr wieder die Differenzreihe, so heisst diese die zweite, u. s. f. Die Differenzreihe einer arithmetischen Reihe erster Ordnung besteht aus gleichen Zahlen. Das Anfangsglied der Reihe und die Anfangsglieder aller Differenzreihen sind die Elemente der Reihe. Aus dieser Definition folgt nun, dass das x te Glied einer arithmetischen Reihe k ter Ordnung gleich ist seinem Anfangsgliede a_0 vermehrt um die Summe der $(x-1)$ ersten Glieder der Differenzreihe. Es setzt also die Bildung des allgemeinen Gliedes einer Reihe k ter Ordnung die Summierung der Reihe $(k-1)$ ter Ordnung voraus. Ist a_0 das Anfangsglied einer Reihe erster Ordnung und a_1 das constante Differenzglied, so liefern $(x-1)$ Glieder der Differenzreihe die Summe $(x-1)a_1$, also ist das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe erster Ordnung:

$$a_0 + (x-1)a_1.$$

Für die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe erhalten wir sofort:

$$\sum(a_0) + a_1 \sum(x-1) = na_0 + \frac{n(n-1)}{2} a_1$$

Ist a_0 jetzt das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung, sind a_1 und a_2 die Elemente d. h. Anfangsglied und Differenz der Differenzreihe, so ist die Summe der $(x-1)$ ersten Glieder dieser Reihe nach der so eben gefundenen Summenformel $(x-1)a_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} a_2$; folglich ist das allgemeine Glied dieser Reihe zweiter Ordnung:

$$a_0 + (x-1)a_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} a_2.$$

Für die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe ergibt sich nach den Summenformeln des vorigen Abschnitts sofort:

$$\begin{aligned} a_0 \Sigma(1) + a_1 \Sigma(x-1) + a_2 \Sigma \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ = na_0 + \frac{n(n-1)}{2} a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a_2. \end{aligned}$$

Ist a_0 das Anfangsglied einer Reihe 3. Ordnung, sind a_1, a_2, a_3 die Elemente der Differenzreihe, d. h. die Anfangsglieder der 3 Differenzreihen, so erhält man in ähnlicher Weise für das allgemeine Glied:

$$a_0 + (x-1)a_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} a_2 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2 \cdot 3} a_3$$

und für die Summe der ersten n Glieder:

$$na_0 + \frac{n(n-1)}{2} a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a_2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_3.$$

4) Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke ist leicht ersichtlich. Ist a_0 das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe k ter Ordnung, und sind $a_1, a_2, \dots, a_k$ die Anfangsglieder der 1., 2. $\dots$ k . Differenzreihe, so ist das allgemeine Glied dieser Reihe

$$a_0 + (x-1)a_1 + \frac{(x-1)^2-1}{2!} a_2 + \frac{(x-1)^3-1}{3!} a_3 + \dots + \frac{(x-1)^k-1}{k!} a_k$$

und die Summe der n ersten Glieder ist:

$$na_0 + \frac{n^2-1}{2!} a_1 + \frac{n^3-1}{3!} a_2 + \frac{n^4-1}{4!} a_3 + \dots + \frac{n^{k+1}-1}{(k+1)!} a_k.$$

5) Jede Reihe, deren allgemeines Glied durch eine ganze Funktion seines Index dargestellt wird, ist eine arithmetische Reihe, und die vorstehende Entwicklung zeigt, daß die Ordnungszahl der Reihe mit der Gradzahl der Funktion übereinstimmt. Um die Summe der Reihe zu finden, muß man die Elemente derselben kennen; um diese bei einer Reihe k . Ordnung zu finden, muß man die $(k+1)$ ersten Glieder bilden.

So bilden z. B. die Glieder der oben gefundenen Summe $\Sigma(2x-1)(3x-2)(4x-3)$ eine arithmetische Reihe dritter Ordnung. Die ersten vier Glieder sind:

$$1, 60, 315, 910.$$

Hieraus ergeben sich die ersten Glieder der Differenzreihen

$$\begin{array}{ccc} 59 & 255 & 595 \\ 196 & 340 & \\ 144. & & \end{array}$$

Es ist also $a_0 = 1$, $a_1 = 59$, $a_2 = 196$, $a_3 = 144$, und die allgemeine Summenformel der arithmetischen Reihen dritter Ordnung giebt nun:

$$\begin{aligned} & \Sigma(2x-1)(3n-2)(4x-3) \\ = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 59 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot 196 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 144 \\ & = 6n^4 - \frac{10}{3}n^3 - \frac{5}{12}n^2 + \frac{5}{6}n, \end{aligned}$$

wie auch oben gefunden wurde.

6) Es giebt noch einige Arten von Productenreihen, die sich leicht summiren lassen. Man setze

$$f_x = (a + bx)^{k/b}, \text{ so ist}$$

$$f_x - f_{x-1} = (a + bx)^{k/b} - [a + b(x-1)]^{k/b} = bk(a + bx)^{k-1/b}.$$

Hieraus folgt:

$$\Sigma(a + bx)^{k-1/b} = \frac{1}{bk} [a + bx]^{k/b} - a^{k/b}.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} & (a+b)(a+2b) + (a+2b)(a+3b) \dots + (a+nb)(a+b+nb) \\ & = \frac{1}{3b} [(a+nb)^{3/b} - a^{3/b}]. \end{aligned}$$

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots (2n-1)(2n+1) = \frac{1}{6} [(2n-1)^{3/2} + 3].$$

$$1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \dots (3n-2)(3n+1) = \frac{1}{9} [(3n-2)^{3/3} + 8].$$

$$\begin{aligned} & (a+b)(2a+b)(3a+b) + (2a+b)(3a+b)(4a+b) + \dots + (na+b)^{3/a} \\ & = \frac{1}{4a} [(an+b)^{4/a} - b^{4/a}]. \end{aligned}$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 \dots + (2n-1)^{3/2} = \frac{1}{8} [(2n-1)^{4/2} + 15].$$

5) Ist $f_x = (a + bx)^{k/2b}$, so wende man die Summierungsformel aus §. 5, 2 an. Es ist nun:

$$f_{x+1} - f_{x-1} = [a + b(x+1)]^{k/2b} - [a + b(x-1)]^{k/2b} = 2bk[a + b(x+1)]^{k-1/2b}.$$

Also folgt nun:

$$\Sigma[a + b(x+1)]^{k-1/2b} = \frac{1}{2bk} [a + b(n+1)]^{k/2b} + (a+bk)^{k/2b} - (a+b)^{k/2b} - a^{k/2b}$$

Setzt man $a = -1$ und $b = 1$, so folgt:

$$\Sigma(x)^{k-1/2} = \frac{1}{2k} [n^{k/2} + (n-1)^{k/2} + 1^{k-1/2}].$$

Beispiele:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \dots + n(n+2) = \frac{1}{6} [n^{3/2} + (n-1)^{3/2} + 3].$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + n(n+2)(n+4) = \frac{1}{8} [n^{4/2} + (n-1)^{4/2} + 15].$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \dots + n(n+2)(n+4)(n+6) \\ = \frac{1}{10} [n^{5/2} + (n-1)^{5/2} + 105].$$

6) Will man diesen letzten Fall verallgemeinern, so setze man $f_x = (a + bx)^{k/rb}$ und wende die Summierungsformel aus §. 5, 3 an. Nun ist

$$[a + b(x+r-1)]^{k/rb} = [a + b(x+r-1)]^{k-1/rb} [a + b(x+kr-1)]$$

$$[a + b(x-1)]^{k/rb} = [a + b(x+r-1)]^{k-1/rb} [a + b(x-1)], \text{ also ist}$$

$$f_{x+r-1} - f_{x-1} = bkr[a + b(x+r-1)]^{k-1/rb}.$$

Die Summierungsformel aus §. 5, 3 giebt nun:

$$\Sigma[a + b(x+r-1)]^{k-1/rb} = \frac{1}{bkr} [a + b(n+r-1)]^{k/rb} + [a + b(n+r-2)]^{k/rb} + \dots \\ + (a+bn)^{k/rb} - [a + b(r-1)]^{k/rb} - [a + b(r-2)]^{k/rb} \dots - a^{k/rb}].$$

Setzt man hier $b = 1$ und $a = 1 - r$, so folgt leicht:

$$\Sigma x^{k-1/r} = \frac{1}{kr} [n^{k/r} + (n-1)^{k/r} + (n-2)^{k/r} \dots + (n-r+1)^{k/r} + (r-1)^{k-1/r} \\ + 2(r-2)^{k-1/r} + \dots + (r-1)1^{k-1/r}].$$

Beispiele:

$$\Sigma(x^{2/3}) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3) = \frac{1}{9} [n^{3/3} + (n-1)^{3/3} + (n-2)^{3/3}] + 2.$$

$$\Sigma(x^{3/3}) = 1 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 8 + \dots + n^{3/3} = \frac{1}{12} [n^{4/3} + (n-1)^{4/3} + (n-2)^{4/3}] + \frac{34}{3}.$$

Alle diese Reihen lassen sich auch summiren, indem man sie nach Angabe des allgemeinen Gliedes in Potenzreihen auflöst, oder indem man die allgemeine Summenformel der arithmetischen Reihen höherer Ordnung anwendet. Zum Theil werden die Summen dann einfacher ausfallen, als bei dem zuletzt angewandten Verfahren. Dieses hat aber das Interesse für sich, daß die Reihe ohne weitere Zwischenrechnung summirt werden konnte.

§. 9. Polygonalzahlen. Polygonalzahlen sind Zahlen, deren Einheiten, als Punkte gedacht, sich über die Fläche eines regelmäßigen Vielecks gleichmäßig vertheilen lassen. Man schreitet von einer Polygonalzahl zu der nächsten gleichartigen fort, indem man die Punktreihen zweier zusammenstoßenden Seiten um je einen Punkt verlängert und dann die übrigen Seiten mit der angemessenen Zahl von Punkten ausfüllt. Sind F_x und F_{x-1} zwei m -seitige Polygonalzahlen mit bezüglich x und $x-1$ Einheiten in der Seite und man zählt die Punkte, die nur in F_x , aber nicht in F_{x-1} vorkommen, so findet man zunächst $m-1$ Eckpunkte und dann in jeder der $m-2$ nicht gemeinschaftlichen Seiten noch $x-2$ Punkte zwischen den Ecken. Es ist demnach

$$F_x - F_{x-1} = m-1 + (m-2)(x-2) = -m+3 + (m-2)x.$$

Summirt man zwischen 1 und x , so findet man

$$F_x = -(m-3)x + (m-2) \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x[(m-2)x - (m-4)]}{2}.$$

Setzt man hier für m bezüglich 3, 4, 5, ... so erhält man die speciellen Polygonalzahlen.

$$\text{Dreieckszahlen} \quad 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots \quad \frac{x(x+1)}{2}.$$

$$\text{Viereckszahlen} \quad 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots \quad x^2.$$

$$\text{Fünfeckszahlen} \quad 1, 5, 12, 22, 35, 51, \dots \quad \frac{x(3x-1)}{2}.$$

$$\text{Sechseckszahlen} \quad 1, 6, 15, 28, 45, 66, \dots \quad x(2x-1).$$

$$m\text{-eckszahlen} \quad 1, m, 3(m-1), 2(3m-4), 5(2m-3), 3(5m-8), \dots \quad \frac{x[(m-2)x - (m-4)]}{2}.$$

Die Polygonalzahlen bilden arithmetische Reihen zweiter Ordnung.

§. 10. Körperzahlen. 1) Körperzahlen sind Zahlen, deren Einheiten, als Punkte gedacht, sich gleichmäßig über den Raum eines gesetzmäßigen Körpers vertheilen lassen. Gewöhnlich handelt man nur von den Pyramidalzahlen und von den Würfelzahlen. Die Pyramidalzahlen erhält man durch Summirung der Polygonalzahlen. Ist P_x die x te m -seitige Pyramidalzahl und behält F_x den Sinn des vorigen Paragraphen, so ist

$$P_x = \sum_{i=1}^x (F_i)$$

Es ist also, wenn wir die Summirung zwischen diesen Grenzen nach §. 8, 1 ausführen:

$$\begin{aligned} P_x &= \sum \left[-(m-3)x + (m-2) \frac{x(x+1)}{2} \right] \\ &= -(m-3) \frac{x(x+1)}{2} + (m-2) \frac{x(x+1)(x+2)}{2 \cdot 3} = \frac{x(x+1)[(m-2)x - (m-5)]}{2 \cdot 3} \end{aligned}$$

Für $m=3, 4, 5 \dots m$ erhält man folgende Specialisirung:

Dreieitige P. Z. $1, 4, 10, 20, 35 \dots \frac{x(x+1)(x+2)}{2 \cdot 3}$

Vierseitige P. Z. $1, 5, 14, 30, 55 \dots \frac{x(x+1)(2x+1)}{2 \cdot 3}$

Fünfeitige P. Z. $1, 6, 18, 40, 75 \dots \frac{x^2(x+1)}{2}$

m -seitige P. Z.

$$1 \cdot m + 1, 2(2m-1), 10(m-1), 5(4m-5) \dots \frac{x(x+1)[(m-2)x - (m-5)]}{2 \cdot 3}$$

2) Um die Körperzahlen, welche anderen gesetzmäßigen Körperformen entsprechen, zu finden, beachte man, daß man von einer solchen Körperzahl zur nächstfolgenden gleichartigen gelangt, indem man die den Flächen, welche an einer Ecke zusammenstoßen, entsprechenden Punktgruppen um die Punkte vermehrt, welche der Verlängerung der Kante um eine Einheit entsprechen, und dann die den übrigen Flächen entsprechenden Punktgruppen hinzufügt. Wir beschränken uns hier darauf, einen allgemeinen gemeinschaftlichen Ausdruck für die Körperzahlen aufzustellen, welche den regelmäßigen Körperformen entsprechen. Der Körper werde von lauter m -seitigen Flächen begrenzt, und jede Ecke sei p -kantig; er habe f Flächen, k Kanten und e Ecken. Ist K_x die x te Körperzahl dieser Form und K_{x-1} die vorhergehende, so bestimmen wir zunächst die Differenz $K_x - K_{x-1}$. Zählen wir die Punkte, welche in K_x mehr enthalten sind als in K_{x-1} , so gehören dahin $e-1$ Punkte an den den

3*

beiden Körpern nicht gemeinschaftlichen Ecken, auf jeder der $k-p$ nicht gemeinschaftlichen Kanten $x-2$ zwischen den Ecken liegende Punkte, also $(x-2)(k-p)$ Kantenpunkte, und dann noch auf $f-p$ nicht gemeinschaftlichen Flächen die inneren Punkte. Die m -seitige Polygonalzahl ist oben bestimmt zu

$$-(m-3)x + (m-2) \frac{x(n+1)}{2},$$

auf dem Umfange dieses Polygons liegen $m(x-1)$ Punkte, also bleiben auf jeder Fläche

$$m - (2m-3)x + (m-2) \frac{x(n+1)}{2}$$

innere Punkte übrig. Hiernach ist

$$\begin{aligned} K_x - K_{x-1} &= e - 1 + (k-p)(x-2) + (f-p) \left[m - (2m-3)x + (m-2) \frac{x(x+1)}{2} \right] \\ &= e - 1 - 2(k-p) + m(f-p) + [k-p - (2m-3)(f-p)]x + (m-2)(f-p) \frac{x(x+1)}{2}. \end{aligned}$$

Nun folgt aus der Natur der regulären Polyeder, daß $k = \frac{mf}{2}$ ist, und mit Hülfe des Euler'schen Satzes über die Polyeder kann man auch f und e durch m und p ausdrücken; es ist nämlich $f = \frac{4p}{2m+2p-mp}$ und $e = \frac{4m}{2m+2p-mp}$. Setzt man diese Werthe ein, so folgt:

$$\begin{aligned} K_x - K_{x-1} &= \frac{2m-p(m-2)[3-(m-2)(p-2)]}{2m+2p-mp} - \frac{2p(m-2)[(m-2)(p-2)-1]}{2m+2p-mp} x \\ &\quad + \frac{p(p-2)(m-2)^2}{2p+2m-mp} \cdot \frac{x(x+1)}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man hier für x nach der Reihe die Werthe 1, 2, 3 bis x und summirt die einzelnen Werthe, so erhält man nach §. 5 und §. 8, 1

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{2m-p(m-2)[3-(m-2)(p-2)]}{2m+2p-mp} x \\ &\quad - \frac{2p(m-2)[(m-2)(p-2)-1]}{2m+2p-mp} \frac{x(x+1)}{2} + \frac{p(p-2)(m-2)^2}{2m+2p-mp} \cdot \frac{x(x+1)(x+2)}{2 \cdot 3}. \end{aligned}$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck für alle regelmäßige Körperzahlen. Setzt man $m=3$ und $p=3$, so erhält man die Tetraederzahl

$$T_x = \frac{x(x+1)(x+2)}{2 \cdot 3}.$$

Setzt man $m = 4$, $p = 3$, so erhält man die Hexaederzahl:

$$H_x = x - 6 \cdot \frac{x(x+1)}{2} + 6 \cdot \frac{x(x+1)(x+2)}{3} = x^3.$$

Setzt man $m = 3$ und $p = 4$, so erhält man die Octaederzahl:

$$O_x = x - 4 \cdot \frac{x(x+1)}{2} + 4 \cdot \frac{x(x+1)(x+2)}{3} = \frac{x(2x^2+1)}{3}.$$

Setzt man $m = 5$ und $p = 3$, so erhält man die Dodekaederzahl:

$$D_x = 10x - 36 \cdot \frac{x(x+1)}{2} + 27 \cdot \frac{x(x+1)(x+2)}{3} = \frac{x(9x^2 - 9x + 2)}{2}.$$

Setzt man endlich $m = 3$ und $p = 5$, so erhält man die Ikosaederzahl:

$$I_x = 6x - 20 \cdot \frac{x(x+1)}{2} + 15 \cdot \frac{x(x+1)(x+2)}{3} = \frac{x(5x^2 - 5x + 2)}{2}.$$

Es war zu erwarten, daß die Tetraederzahlen mit den dreiseitigen Pyramidalzahlen und die Hexaederzahlen mit den Kubitzahlen zusammenfallen würden. Die übrigen Körperzahlen regelmäßiger Körperformen specialisiren sich in folgender Art:

Octaederzahlen: 1, 6, 19, 44, 85, 146 ...

Dodekaederzahlen: 1, 20, 84, 220, 455, 816 ...

Ikosaederzahlen: 1, 12, 48, 124, 255, 456 ...

3) Man kann auch die Körperzahlen, die anderen gesetzmäßigen Körperformen entsprechen, aufstellen, auch wäre es ausführbar, die verwandten Körperformen gemeinschaftliche Zahlform aufzustellen, wie es oben für die regelmäßigen Körperformen geschehen ist. Wir gehen darauf hier nicht näher ein und beschränken uns nur auf einen speciellen Fall.

Werden die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders so abgeschnitten, daß die Schnittflächen gleichseitige Dreiecke und die Restflächen gleichseitige Sechsecke werden, so entsteht ein von 4 Dreiecken und 4 Sechsecken begrenzter Körper mit 12 Ecken und 18 Kanten, an jeder Ecke stoßen zwei Sechsecke und ein Dreieck zusammen. Es sollen die dieser Körperform entsprechenden Körperzahlen bestimmt werden.

Haben jetzt K_x und K_{x-1} analoge Bedeutungen wie oben, so setzt sich die in $K_x - K_{x-1}$ enthaltene Anzahl von Punkten zusammen 1) aus 11 nicht gemeinsamen Eckpunkten, 2) aus den $(x-2)$ auf jeder der 15 nicht gemeinsamen Kanten liegenden inneren Punkten und 3) aus den inneren Punkten der nicht gemeinsamen 3 Dreiecke und 2 Sechsecke. Die Zahl der inneren Punkte des Dreiecks ist

$$\frac{x(x+1)}{2} - 3(x-1) = \frac{(x-2)(x-3)}{2}, \text{ die des Sechseck ist}$$

$$x(2x-1) - 6(x-1) = (x-2)(2x-3). \text{ Demnach ist}$$

$$\begin{aligned} K_x - K_{x-1} &= 11 + 15(x-2) + 3 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{2} + 2(x-2)(2x-3) \\ &= 2 - \frac{13}{2}x + \frac{11}{2}x^2. \end{aligned}$$

Durch Summierung zwischen 1 und x folgt nach Anwendung oben entwickelter Formeln

$$K_x = 2x - \frac{13 \cdot x(n+1)}{4} + \frac{11 \cdot x(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{x(11x^2 - 3x - 2)}{6}.$$

Die Zahlen dieser Körperform sind also:

$$1, 12, 44, 108, 215, 376 \dots$$

Alle Körperzahlen bilden Reihen dritter Ordnung.

3. Summierung der Werthe von Exponentialfunktionen.

§. 11. Geometrische Reihen.

1) Setzt man $f_x = e^x$, so ist $f_x - f_{x-1} = e^x - e^{x-1} = e^{x-1}(e-1)$ und $f_0 = 1$, und unsere Hauptformel aus §. 5, 1 giebt sofort

$$\Sigma [e^{x-1}(e-1)] = e^n - 1, \text{ oder}$$

$$\Sigma (e^{x-1}) = \frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Ist a ein constanter Factor, so ist:

$$\Sigma (ae^{x-1}) = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{a(1 - e^n)}{1 - e}.$$

Eine Reihe, deren Gesetz ae^{x-1} ist, heißt eine geometrische Reihe im engeren Sinne; es sind in ihr die Quotienten aufeinander folgender Glieder einander gleich. Wird das Gesetz dieser Reihe mit einer Function des Index als Factor verbunden, die für sich allein wieder eine arithmetische Reihe irgend welcher Ordnung bezeichnen würde, so erhält man eine geometrische Reihe im weiteren Sinne oder eine zusammenge setzte Reihe. Auch diese Reihen lassen sich leicht summiren.