

7. Sekundärliteratur

**Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen
der Realschule I. Ordnung im Waisenhouse zu Halle am ...
in dem Versammlungssaale des neuen ...**

Halle (Saale), 1838

4. Summirung der Werthe gebrochener Funktionen.

Nutzungsbedingungen

Die Digitalisate des Francke-Portals sind urheberrechtlich geschützt. Sie dürfen für wissenschaftliche und private Zwecke heruntergeladen und ausgedruckt werden. Vorhandene Herkunftsbezeichnungen dürfen dabei nicht entfernt werden.

Eine kommerzielle oder institutionelle Nutzung oder Veröffentlichung dieser Inhalte ist ohne vorheriges schriftliches Einverständnis des Studienzentrums August Hermann Francke der Franckeschen Stiftungen nicht gestattet, das ggf. auf weitere Institutionen als Rechteinhaber verweist. Für die Veröffentlichung der Digitalisate können gemäß der Gebührenordnung der Franckeschen Stiftungen Entgelte erhoben werden.

Zur Erteilung einer Veröffentlichungsgenehmigung wenden Sie sich bitte an die Leiterin des Studienzentrums, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

Terms of use

All digital documents of the Francke-Portal are protected by copyright. They may be downloaded and printed only for non-commercial educational, research and private purposes. Attached provenance marks may not be removed.

Commercial or institutional use or publication of these digital documents in printed or digital form is not allowed without obtaining prior written permission by the Study Center August Hermann Francke of the Francke Foundations which can refer to other institutions as right holders. If digital documents are published, the Study Center is entitled to charge a fee in accordance with the scale of charges of the Francke Foundations.

For reproduction requests and permissions, please contact the head of the Study Center, Frau Dr. Britta Klosterberg, Franckeplatz 1, Haus 22-24, 06110 Halle (studienzentrum@francke-halle.de)

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Die zweite Reihe hat dagegen die Summe

$$\begin{aligned} & \frac{n}{2} \cdot 4 + \frac{\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right)}{2} \cdot 12 + \frac{\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \left(\frac{n}{2} - 2 \right)}{2 \cdot 3} \cdot 8 \\ &= 2n + \frac{3}{2} n (n-2) + \frac{n(n-2)(n-4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

Demnach folgt, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$\Sigma (x^2 (-1)^{x-1}) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ist hingegen n eine ungerade Zahl, so hat die erste Reihe $\frac{n+1}{2}$ Glieder und die zweite deren $\frac{n-1}{2}$, die beiden Summen sind dann beziehungsweise:

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2} \cdot 1 + \frac{\frac{n+1}{2} \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right)}{2} \cdot 8 + \frac{\frac{n+1}{2} \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) \left(\frac{n+1}{2} - 2 \right)}{2 \cdot 3} \cdot 8 \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{2} \cdot 4 + \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right)}{2} \cdot 12 + \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right) \left(\frac{n-1}{2} - 2 \right)}{2 \cdot 3} \cdot 8 \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Folglich ist, wenn n eine ungerade Zahl ist:

$$\Sigma (x^2 (-1)^{x-1}) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Summirung der Werthe gebrochener Funktionen.

§. 13. 1) Es sei $f_x = \frac{x}{a+bx}$, so ist

$$f_x - f_{x-1} = \frac{x}{a+bx} - \frac{x-1}{a+b(x-1)} = \frac{a}{[a+b(x-1)][a+bx]}, \text{ folglich ist}$$

$$\sum \frac{1}{[a+b(x-1)][a+bx]} = \frac{n}{a(a+bn)}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot (m+1)} + \frac{1}{(m+1)(2m+1)} + \frac{1}{(2m+1)(3m+1)} \cdots + \frac{1}{[(n-1)m+1][nm+1]} \\ = \frac{n}{mn+1}.$$

Da die einfachste gebrochene Funktion von n , als Summenformel genommen, auf eine Reihe führt, deren Glieder im Nenner zwei Factoren haben, so läßt sich erwarten, daß, wenn die Glieder der Reihe nach der Form $\frac{1}{a+bx}$ gebildet sind, die Reihe keine endliche summirbare Reihe sein wird.

2) Setzt man $f_x = \frac{x(x+1)}{(a+bx)(a+b(x+1))}$, oder in abgekürzter Schreibweise

$$f_x = \frac{x^{2|1}}{(a+bx)^{2|b}}, \text{ so folgt:}$$

$$f_x - f_{x-1} = \frac{2ax}{[a+b(x-1)]^{3|b}} \text{ und}$$

$$\sum \frac{x}{[a+(x-1)b]^{3|b}} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{n^{2|1}}{(a+bn)^{2|b}}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}.$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{3}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{n}{(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)}{(n+3)(n+4)}.$$

$$\frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{2}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{3}{8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots + \frac{n}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n+1)}{(3n+2)(3n+5)}.$$

3) Es ist nun

$$\frac{1}{[a + (x-1)b]^{2/b}} = \frac{a + (x+1)b}{[a + (x-1)b]^{3/b}} = \frac{a+b}{[a + (x-1)b]^{3/b}} + \frac{xb}{[a + (x-1)b]^{3/b}}.$$

Hieraus folgt nach der Summierung auf beiden Seiten zwischen $x=1$ und $x=n$

$$\begin{aligned} (a+b) \sum \frac{1}{[a + (x-1)b]^{3/b}} &= \sum \frac{1}{[a + (x-1)b]^{2/b}} - b \sum \frac{x}{[a + (x-1)b]^{3/b}} \\ &= \frac{1}{a} \frac{n}{(a+nb)} - \frac{b}{2a} \frac{n(n+1)}{(a+bn)(a+(n+1)b)} = \frac{n[2a+b+nb]}{2a(a+bn)^{2/b}}, \text{ also:} \\ \sum \frac{1}{[a + (x-1)b]^{3/b}} &= \frac{n[2a+b+nb]}{2a(a+b)(a+bn)^{2/b}}. \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \\ = \frac{n(n+2)}{3 \cdot (2n+1)(2n+3)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{1}{8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)} \\ = \frac{n(3n+7)}{4 \cdot 5(3n+2)(3n+5)}. \end{aligned}$$

4) Es ist

$$\frac{1}{[a + (x-1)b]^{2/2b}} = \frac{a+xb}{[a + (x-1)b]^{3/b}} = \frac{a}{[a + (x-1)b]^{3/b}} + \frac{bx}{[a + (x-1)b]^{3/b}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{[a + (x-1)b]^{2/2b}} &= a \sum \frac{1}{[a + (x-1)b]^{3/b}} + b \sum \frac{x}{[a + (x-1)b]^{3/b}} \\ &= \frac{n[2a+b+nb]}{2(a+b)(a+bn)^{2/b}} + \frac{b}{2a} \frac{n(n+1)}{(a+bn)^{2/b}} \\ &= \frac{n[2a^2+2ab+b^2+nb(2a+b)]}{2a(a+b)(a+nb)^{2/b}}. \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4 \cdot (n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

5) Die drei letzten Summenformeln lassen sich als besondere Fälle einer allgemeineren Summierungsaufgabe auffassen.

Setzt man $f_x = \frac{x(p+qx)}{(a+bx)^{3/2}}$, so ist

$$f_x - f_{x-1} = \frac{[q(2a+b) - bp]x + (a+b)(p-q)}{[a+b(x-1)]^{3/2}}$$

Setzt man nun $(a+b)(p-q) = c$ und $q(2a+b) - bp = d$, so folgt

$$p = \frac{a(2c+d) + b(c+d)}{2a(a+b)} \quad \text{und} \quad q = \frac{ad + b(c+d)}{2a(a+b)}$$

Demnach ist

$$\sum \frac{c+dx}{[a+(x-1)b]^{3/2}} = \frac{n[a(2c+d) + b(c+d) + n(ad + b(c+d))]}{2a(a+b)[a+nb]^{3/2}}$$

Setzt man hierin $c=0$ und $d=1$ oder $c=1$ und $d=0$ oder $c=a$ und $d=b$, so erhält man der Reihe nach die letzten drei Formeln 2) bis 4).

Beispiele:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{7}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+1)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{7}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{3n-2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(5n+1)}{6(2n+1)(2n+3)}$$

6) Man erkennt leicht, wie sich die Gestalt dieser Reihen noch erweitern läßt.

Setzt man $f = \frac{x^{2/3}}{[a+xb]^{3/2}}$ und wendet dann das in den vorigen Abschnitten gezeigte Verfahren an, so erhält man leicht:

$$\sum \frac{x^{2/3}}{[a+(x-1)b]^{4/3}} = \frac{1}{3a} \cdot \frac{n^{3/2}}{(a+nb)^{3/2}}$$

$$\sum \frac{x}{[a + (x-1)b]^{4|b}} = \frac{1}{6a(a+b)} \cdot \frac{n^{2|1}(3a+2b+nb)}{(a+nb)^{3|b}}.$$

$$\sum \frac{1}{[a + (x-1)b]^{4|6}} = \frac{1}{3a(a+b)(a+2b)} \cdot \frac{n[3a^2+6ab+2b^2+3b(a+b)n+b^2n^2]}{(a+nb)^{3|6}}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{6}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdots \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n+3)^{4|1}} = \frac{n^{3|1}}{18 \cdot (n+3)^{3|1}}.$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdots + \frac{n}{(n+1)^{4|1}} = \frac{n(n+1)(n+8)}{36(n+2)^{3|1}}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdots + \frac{1}{n^{4|1}} = \frac{n(n^2+6n+11)}{18 \cdot (n+1)^{3|1}}.$$

Nach einigen Zwischenrechnungen summiert man auch leicht folgende Reihen:

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{9}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{n^2}{(n+1)^{4|1}} = \frac{n(n+1)(5n+4)}{36 \cdot (n+2)^{3|1}}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} \cdots + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{n(11n^2+48n+49)}{18 \cdot (n+1)^{3|1}}.$$

7) Man kann die Formen dieser Reihen noch mehr verallgemeinern. Setzt man

$$f_x = \frac{x^{k|1}}{(a+bx)^{k|b}}, \text{ so ist } f_x - f_{x-1} = \frac{x^{k|1}}{(a+bx)^{k|b}} - \frac{(x-1)^{k|1}}{[a+(x-1)b]^{k|b}}$$

$$= \frac{x^{k-1|1}}{(a+bx)^{k-1|1}} \left[\frac{x+k-1}{a+(x+k-1)b} - \frac{x-1}{a+(x-1)b} \right] = \frac{kax^{k-1|1}}{[a+b(x-1)]^{k+1|b}}.$$

Folglich ist

$$\sum \frac{x^{k-1|1}}{[a+b(x-1)]^{k+1|b}} = \frac{1}{ka} \cdot \frac{x^{k|1}}{(a+bx)^{k|1}}.$$

Zum Beispiel:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots \frac{n^{3|1}}{(n+3)^{5|1}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{n^{4|1}}{(n+4)^{4|1}}.$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \cdots \frac{n^{3|1}}{(2n-1)^{5|1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^{4|1}}{(2n+1)^{4|2}}.$$

8) Setzt man $f_x = \frac{1}{(a+bx)^{k/b}}$, so erhält man $f_x - f_{x-1} = \frac{-bk}{(a-b+bx)^{k+1/b}}$; also ist:

$$\sum \frac{1}{(a-b+bx)^{k+1/b}} = \frac{1}{bk} \left[\frac{1}{a^{k/b}} - \frac{1}{(a+bn)^{k/b}} \right].$$

Zum Beispiel:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{n}{n^4 \cdot 1} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)^{3/1}} \right] = \frac{1}{18} \left[\frac{(n+1)^{3/1} - 6}{(n+1)^{3/1}} \right].$$

9) Noch allgemeiner wird die Summierung, wenn wir $f_x = \frac{(c+dx)^{k/d}}{(a+bx)^{k/b}}$ setzen; es folgt dann:

$$\sum \frac{(c+dx)^{k-1/d}}{[a+b(x-1)]^{k+1/b}} = \frac{1}{k(ad-bc)} \left[\frac{(c+dn)^{k/d}}{(a+bn)^{k/b}} - \frac{c^{k/d}}{a^{k/b}} \right].$$

Setzt man hierin $k=2$, so folgt

$$\sum \frac{c+dx}{(a+b(x-1))^{3/b}} = \frac{1}{2(ad-bc)} \left[\frac{(c+dn)^{2/d}}{(a+bn)^{2/b}} - \frac{c^{2/d}}{a^{2/b}} \right].$$

Diese Reihe ist schon oben unter 5) summiert; eine geringe Umformung des jetzt gefundenen Werthes wird seine Identität mit dem früher gefundenen darthun.

Beispiele:

$$\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \frac{4n^2-1}{n^4 \cdot 1} = \frac{1}{9} \left[\frac{(2n-1)^{3/2}}{(n+1)^{3/1}} + \frac{1}{2} \right].$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \frac{(2n-1)^{3/2}}{n^{5/1}} = \frac{1}{12} \left[\frac{(2n-1)^{4/2}}{(n+1)^{4/1}} + \frac{5}{8} \right].$$

10) Bezeichnet l eine positive ganze Zahl, die kleiner als k ist, so ist:

$$\frac{(c+dx)^{k-1/d}}{(a+bx)^{k+1/b}} = \frac{(c+dx) [c+d(x+1)]^{k-1-1/d}}{(a+bx)^{k+1/b}}.$$

Da nun $c+dx = \frac{bc-ad}{b} + \frac{d}{b}(a+bx)$, so folgt leicht:

$$\sum \frac{(c+dx)^{k-1/d}}{(a+bx)^{k+1/b}} = \frac{bc-ad}{b} \sum \frac{[c+d(x+1)]^{k-1-1/d}}{(a+bx)^{k+1/b}} + \frac{d}{b} \sum \frac{[c+d(x+1)]^{k+1-1/d}}{[a+b(x+1)]^{k/d}}.$$

5*

Lassen sich zwei dieser drei Summen nach früheren Formeln ausführen, so ist es auch mit der dritten der Fall. So folgt für $l = k - 1$:

$$\sum \frac{c+dx}{(a+bx)^{k+1|b}} + \frac{bc-ad}{b} \sum \frac{1}{(a+bx)^{k+1|b}} + \frac{d}{b} \sum \frac{1}{(a+b+bx)^{k|b}}.$$

Ebenso folgt für $l = 1$:

$$\sum \frac{(c+d+dx)^{k-2|d}}{(a+bx)^{k+1|b}} = \frac{b}{bc-ad} \sum \frac{(c+dx)^{k-1|d}}{(a+bx)^{k+1|b}} - \frac{d}{bc-ad} \sum \frac{(c+d+dx)^{k-2|d}}{(a+b+bx)^{k|b}}.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdots + \frac{2n-1}{n^{4|1}} = \frac{1}{9} - \frac{3n+2}{3(n+1)^{3|1}} \\ & \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdots + \frac{4n^2-1}{n^{5|1}} \\ & = \frac{17}{1440} + \frac{2}{45} \frac{(2n-1)^{3|2}}{(n+2)^{3|1}} - \frac{1}{60} \frac{(2n-3)^{4|2}}{(n+1)^{4|1}}. \end{aligned}$$

11) Eine neue Gruppe summierbarer endlicher Reihen erhält man, wenn man die Summenformel aus §. 5, 2) und 3) anwendet; wir beschränken uns jedoch hier nur auf die einfacheren Fälle.

Es sei $f_x = \frac{x}{a+bx}$, dann ist $f_{x+r-1} - f_{x-1}$

$$= \frac{x+r-1}{a+b(x+r-1)} - \frac{x-1}{a+b(x-1)} = \frac{ar}{(a-b+bx)^{2|br}}.$$

Folglich ist nach §. 5, 3)

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{(a-b+bx)^{2|br}} &= \frac{1}{ar} \left[\frac{n+r-1}{a+b(n+r-1)} + \frac{n+r-2}{a+b(n+r-2)} \cdots + \frac{n}{a+bn} \right. \\ & \quad \left. - \frac{r-1}{a+b(r-1)} - \frac{r-2}{a+b(r-2)} - \cdots - \frac{1}{a+b} \right] = \frac{n}{r} \left[\frac{1}{(a+br-b)^{2|nb}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(a+br-2b)^{2|nb}} + \cdots + \frac{1}{a^{2|nb}} \right]. \end{aligned}$$

Setzt man $a = b = 1$, so erhält man:

$$\sum \left(\frac{1}{x^{2|r}} \right) = \frac{n}{r} \left[\frac{1}{r(r+n)} + \frac{1}{(r-1)(r+n-1)} + \frac{1}{(r-2)(r+n-2)} \cdots \frac{1}{1(n+1)} \right].$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n}{2} \left[\frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{n+1} \right] = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} \cdots + \frac{1}{n(n+3)} &= \frac{n}{3} \left[\frac{1}{3(n+3)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{n+1} \right] \\ &= \frac{n(11n^2 + 48n + 49)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}. *) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} &= \frac{n}{2} \left[\frac{1}{3(2n+3)} + \frac{1}{2n+1} \right] \\ &= \frac{n(4n+5)}{3(2n-1)(2n+3)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} &= \frac{n}{3} \left[\frac{1}{5(2n+5)} + \frac{1}{3(2n+3)} + \frac{1}{2n+1} \right] \\ &= \frac{n(92n^2 + 324n + 259)}{45(2n+1)(2n+3)(2n+5)}. \end{aligned}$$

12) Setzt man ähnlich wie oben in 9) $f_x = \frac{(c+dx)^{k|rd}}{(a+bx)^{k|rd}}$, so ist $f_{x+r-1} - f_{x-1}$

$$= \frac{[c+d(x+r-1)]^{k|rd}}{[a+b(x+r-1)]^{k|rb}} - \frac{[c+d(x-1)]^{k|rd}}{[a+b(x-1)]^{k|rb}} = \frac{kr(ad-bc)[c+d(x+r-1)]^{k-1|rd}}{[a+b(x-1)]^{k+1|rb}}.$$

Die Anwendung der Formel aus §. 5, 3 gibt nun:

$$\begin{aligned} \sum \frac{[c+d(x+r-1)]^{k-1|rd}}{[a+b(x-1)]^{k+1|rb}} &= \frac{1}{kr(ad-bc)} \left[\frac{[c+d(n+r-1)]^{k|rd}}{[a+b(n+r-1)]^{k|rb}} \right. \\ &+ \frac{[c+d(n+r-2)]^{k|rd}}{[a+b(n+r-2)]^{k|rb}} \cdots + \frac{(c+dn)^{k|rd}}{(a+bn)^{k|rb}} - \frac{[c+d(r-1)]^{k|rd}}{[a+b(r-1)]^{k|rb}} \\ &\left. - \frac{[c+d(r-2)]^{k|rd}}{[a+b(r-2)]^{k|rb}} \cdots - \frac{c^{k|rd}}{a^{k|rb}} \right]. \end{aligned}$$

*) Diese beiden Reihen sind schon oben auf umständlicherem Wege summiert.

Setzt man hier $r=2$, so folgt:

$$\sum \frac{[c+d(x+1)]^{k-1/2d}}{[a+b(x-1)]^{k+1/2b}} = \frac{1}{2k(ad-bc)} \left[\frac{[c+d(n+1)]^{k/2d}}{[a+b(n+1)]^{k/2b}} + \frac{(c+dn)^{k/2d}}{(a+bn)^{k/2b}} - \frac{(c+d)^{k/2d}}{(a+b)^{k/2b}} - \frac{c^{k/2d}}{a^{k/2b}} \right].$$

Setzt man in den beiden letzten Summenformeln $d=1$ und $c=-r+1$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \sum \frac{x^{k-1/r}}{[a+b(x-1)]^{k+1/rb}} &= \frac{1}{kr[a+b(r-1)]} \left[\frac{n^{k/r}}{[a+b(n+r-1)]^{k/rb}} \right. \\ &+ \frac{(n-1)^{k/r}}{[a+b(n+r-2)]^{k/rb}} \cdots + \frac{(n-r+1)^{k/r}}{(a+bn)^{k/rb}} + \frac{(r-1)^{k-1/r}}{[a+b(r-2)]^{k/rb}} \\ &+ \left. \frac{2(r-2)^{k-1/r}}{[a+b(r-3)]^{k/rb}} \cdots + \frac{(r-1)^{k-1/r}}{a^{k/rb}} \right]. \\ \sum \frac{x^{k-1/2}}{[a+b(x-1)]^{k+1/2b}} &= \frac{1}{2k(a+b)} \left[\frac{n^{k/2}}{[a+b(n+1)]^{k/2b}} + \frac{(n-1)^{k/2}}{(a+bn)^{k/2b}} + \frac{1^{k-1/2}}{a^{k/2b}} \right]. \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdots + \frac{n}{(n+1)(n+3)(n+5)} = \frac{1}{12} \left[\frac{n(n+2)}{(n+3)(n+5)} + \frac{(n-1)(n+1)}{(n+2)(n+4)} + \frac{1}{2 \cdot 4} \right].$$

$$\frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{2}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{3}{5 \cdot 9 \cdot 13} \cdots + \frac{n}{(2n-1)(2n+3)(2n+7)} = \frac{1}{12} \left[\frac{n(n+2)}{(2n+3)(2n+7)} + \frac{(n-1)(n+1)}{(2n+1)(2n+5)} + \frac{1}{5} \right].$$

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots + \frac{n(n+2)}{(n+1)^4} = \frac{1}{18} \left[\frac{n^{3/2}}{(n+3)^{3/2}} + \frac{(n-1)^{3/2}}{(n+2)^{3/2}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right].$$

13) Setzt man in der Hauptformel des vorigen Abschnitts $c=1$ und $d=0$, so erhält man:

$$\sum \frac{1}{(a-b+bx)^{k+1/rb}} = \frac{1}{krb} \left[\frac{1}{a^{k/rb}} + \frac{1}{(a+b)^{k/rb}} + \dots + \frac{1}{[a+(r-1)b]^{k/rb}} - \frac{1}{(a+nb)^{k/rb}} \right. \\ \left. - \frac{1}{[a+(n+1)b]^{k/rb}} - \dots - \frac{1}{[a+(n+r-1)b]^{k/rb}} \right].$$

Für $a=b=1$ folgt:

$$\sum \frac{1}{x^{k+1/r}} = \frac{1}{kr} \left[\frac{1}{1^{k/r}} + \frac{1}{2^{k/r}} + \frac{1}{3^{k/r}} + \dots + \frac{1}{r^{k/r}} - \frac{1}{(n+1)^{k/r}} - \frac{1}{(n+2)^{k/r}} \right. \\ \left. - \dots - \frac{1}{(n+r)^{k/r}} \right].$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)} \right].$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{n^{4/2}} = \frac{1}{6} \left[\frac{7}{80} - \frac{1}{(n+1)^{3/2}} - \frac{1}{(n+2)^{3/2}} \right].$$

$$\frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^{3/4}} = \frac{1}{8} \left[\frac{26}{105} - \frac{1}{(2n+1)^{2/4}} - \frac{1}{(2n+3)^{2/4}} \right].$$

14) Nimmt man mit dem Ausdruck $\frac{(c+dx)^{k-1/dr}}{(a+bx)^{k+1/rb}}$, in welchem l eine positive ganze Zahl kleiner als k bedeutet, eine ähnliche Umformung vor, wie sie oben in 10) gezeigt ist, so erhält man:

$$\sum \frac{(c+dx)^{k-1/dr}}{(a+bx)^{k+1/rb}} = \frac{bc-ad}{b} \sum \frac{[c+d(x+r)]^{k-1-1/dr}}{(a+bx)^{k+1/rb}} + \frac{d}{b} \sum \frac{[c+d(x+r)]^{k+1-1/dr}}{[a+b(n+r)]^{k/rb}}.$$

Sind von diesen drei Summen zwei zu entwickeln, so ist es auch die dritte.

Beispiel:

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{n}{(n+1)^{4/2}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4^{2/2}} + \frac{1}{5^{2/2}} - \frac{1}{(n+4)^{2/2}} - \frac{1}{(n+5)^{2/2}} \right] \\ - \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{(n+2)^{3/2}} - \frac{1}{(n+3)^{3/2}} \right].$$

15) Man sieht hieraus, daß die Anzahl der verschiedenen Formen gebrochener Reihen, welche als endliche Reihen summierbar sind, unendlich groß ist. Bisher waren

die in den Gliedern vorkommenden Factoren vom ersten Grade, es ist aber auch möglich, Reihen zu bilden, in denen diese Factoren vom zweiten, überhaupt von einem höheren Grade sind. In allen betrachteten Fällen war aber im allgemeinen Gliede der Reihe der Grad des Zählers mindestens um zwei kleiner als der Grad des Nenners, woraus wir erwarten können, daß da, wo diese Differenz nur eins beträgt, die Reihe sich der Summirung in endlicher Gestalt entzieht.

§. 14. Unendliche Reihen mit gebrochenen Gliedern. Sämmtliche im vorigen Paragraph betrachtete Reihen geben noch endliche Summen, wenn die Anzahl der Glieder unendlich groß genommen wird, denn der Grad, in welchem die Zahl n in der Summenformel vorkommt, ist derselbe im Zähler wie im Nenner. Dividirt man nun so wohl den Zähler als den Nenner durch die höchste in ihnen vorkommende Potenz von n und läßt nach der Division n ohne Grenze wachsen, so erhält man den Summenwerth der unendlichen Reihe. In dieser Weise findet man:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(a-b+bx)^{2b}} = \frac{1}{ab}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{x}{(a-b+bx)^{3b}} = \frac{1}{2ab^2}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(a-b+bx)^{3b}} = \frac{1}{2ab(a+b)}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(a-b+bx)^{2/2b}} = \frac{2a+b}{2ab(a+b)}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{c+dx}{(a-b+bx)^{3b}} = \frac{ad+bc+bd}{2ab^2(a+b)}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{x^{2/1}}{(a-b+bx)^{4b}} = \frac{1}{3ab^3}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{x}{(a-b+bx)^{4b}} = \frac{1}{6a(a+b)b^2}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(a-b+bx)^{4b}} = \frac{1}{3ab(a+b)(a+2b)}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{x^{k-1/1}}{(a-b+bx)^{k+1/b}} = \frac{1}{kab^k}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(c+dx)^{k-1/d}}{(a-b+bx)^{k+1/b}} = \frac{1}{k(ad-bc)} \left(\frac{d^k}{b^k} - \frac{c^{k/d}}{a^{k/b}} \right).$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(a-b+bx)^{k+1/b}} = \frac{1}{bk \cdot a^{k/b}}.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(a-b+bx)^{2/rb}} = \frac{1}{br} \left[\frac{1}{a+b(r-1)} + \frac{1}{a+b(r-2)} + \dots + \frac{1}{a} \right].$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{x^{2/r}} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right].$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{[c+d(x+r-1)]^{k-1/d}}{(a+b(x-1))^{k+1/b}} = \frac{1}{kr(ad-bc)} \left[r \frac{d^k}{b^k} - \frac{[c+d(r-1)]^{k/d}}{[a+b(r-1)]^{k/b}} \right. \\ \left. - \frac{[c+d(r-2)]^{k/d}}{[a+b(r-2)]^{k/b}} - \dots - \frac{c^{k/d}}{a^{k/b}} \right].$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \text{ in inf. } = 1.$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \text{ in inf. } = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \text{ in inf. } = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots \text{ in inf. } = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \text{ in inf. } = \frac{1}{9}.$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \text{ in inf. } = \frac{1}{24}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \text{ in inf. } = \frac{1}{18}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots \text{ in inf. } = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots \text{ in inf. } = \frac{11}{18}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots \text{ in inf. } = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \dots \text{ in inf. } = \frac{23}{90}.$$

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \text{ in inf. } = \frac{17}{96}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{2}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{3}{5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots \text{ in inf. } = \frac{7}{120}.$$

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots \text{ in inf. } = \frac{11}{96}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \text{ in inf. } = \frac{11}{96}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \text{ in inf. } = \frac{7}{480}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \dots \text{ in inf. } = \frac{13}{420}.$$

$$\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots \text{ in inf. } = \frac{19}{840}.$$

§. 15. 1. Die Glieder der bisher summirten gebrochenen Reihen hatten in den Zählern und Nennern bezüglich gleich viel Factoren. Es lassen sich aber auch gewisse Reihen mit gebrochenen Gliedern summiren, in denen die Anzahl der Factoren mit dem Index wächst.

Setzt man $f_x = \frac{a^{x|b}}{c^{x|b}}$, so ist $f_0 = 1$ und $f_x = f_{x-1}$

$$= \frac{a^{x|b}}{c^{x|b}} - \frac{a^{x-1|b}}{c^{x-1|b}} = (a - c) \frac{a^{x-1|b}}{c^{x|b}}; \text{ also ist } \sum \frac{a^{x-1|b}}{c^{x|b}} = \frac{1}{a - c} \left(\frac{a^{n|b}}{c^{n|b}} - 1 \right).$$

Setzt man allgemeiner $f_x = \frac{a^{x+p|b}}{c^{x+m|b}}$, so folgt in gleicher Weise

$$\sum \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{a + (p - m)b - c} \left(\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}} - \frac{a^{p|b}}{c^{m|b}} \right).$$

Hier können m und p jede ganzen, positiven oder negativen Zahlen bedeuten; setzt man $-m$ an die Stelle von $+m$, $p=0$ und bedenkt, daß $c^{-mb} = \frac{1}{(c-b)^{m|b}}$ ist, so erhält man:

$$\sum \frac{a^{x-1|b}}{c^{x-m|b}} = \frac{1}{a+mb-c} \left(\frac{a^{nb}}{c^{n-m|b}} - (c-b)^{m|b} \right).$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots + \frac{1^{n-1|2}}{2^{n|2}} = 1 - \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}.$$

$$1 + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{2^{n-1|2}}{1^{n|2}} = \frac{2^{n|2}}{1^{n|2}} - 1.$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{1^{n-1|2}}{2^{n-1|2}} = \frac{1^{n|2}}{2^{n-1|2}}.$$

$$1 + 2 + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{2^{n-1|2}}{1^{n-1|2}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2^{n|2}}{1^{n-1|2}} + 1 \right).$$

$$1 + \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{1^{n|2}}{2^{n-1|2}} = \frac{1}{3} \frac{1^{n+1|2}}{2^{n-1|2}}.$$

$$2 + \frac{2 \cdot 4}{1} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{2^{n|2}}{1^{n-1|2}} = \frac{1}{5} \left(\frac{2^{n+1|2}}{1^{n-1|2}} + 2 \right).$$

2. Ist der Unterschied von a und c ein Vielfaches von b , so erhalten die späteren Glieder der Reihe im Zähler und Nenner gemeinschaftliche Factoren, nach deren Hebung die Reihe eine Gestalt gewinnt, die schon oben behandelt ist. Der Einfachheit wegen wollen wir bei diesem Nachweis $p=0$ und $m=0$ setzen. Ist nun $a=c+rb$, so ist

$$\frac{a^{x-1|b}}{c^{x|b}} = \frac{(c+rb)^{x-1|b}}{c^{x|b}} = \frac{(c+rb)^{x-1|b}}{c^{r|b}(c+rb)^{x-r|b}} = \frac{(c+rb)^{r-1|b}}{c^{r|b}}.$$

Hiernach ist nun, wenn nach der Substitution dieses Werthes mit $c^{r|b}$ multiplicirt wird:

$\Sigma (c+rb)^{r-1|b} = \frac{1}{rb} [(c+nb)^{r|b} - c^{r|b}]$, ein Resultat, welches mit dem im §. 8, 4 gefundenen übereinstimmt.

Ist hingegen $c = a + rb$, so folgt:

$$\frac{a^{x-1|b}}{c^{x|b}} = \frac{a^{x-1|b}}{(a+rb)^{x|b}} = \frac{a^{r|b} \cdot (a+rb)^{x-r-1|b}}{(a+rb)^{x|b}} = \frac{a^{r|b}}{(a-b+bx)^{r+1|b}}.$$

Substituirt man diesen Werth, so folgt nach Division mit $a^{r|b}$:

$$\sum \frac{1}{(a-b+bx)^{r+1|b}} = \frac{1}{rb} \left(\frac{1}{a^{r|b}} - \frac{1}{(a+bn)^{r|b}} \right).$$

Dieses Resultat stimmt mit dem im §. 13, 8 gefundenen überein.

Setzt man in unserer allgemeinen Formel $b=0$ so ist, da die Factoriellen jetzt Potenzen werden:

$$\sum \left(\frac{a^{x+p-1}}{c^{x+m}} \right) = \frac{1}{a-c} \left(\frac{a^{n+p}}{c^{n+m}} - \frac{a^p}{c^m} \right).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{c^{m+1}}{a^p}$ und setzt $\frac{a}{c} = e$, so geht sie über in

$\sum (e^{x-1}) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$; dieses ist aber die bekannte Summengleichung der geometrischen Reihe.

3) Setzt man $f_x = x \frac{a^{x+p|b}}{c^{x+m|b}}$, so folgt:

$$f_x - f_{x-1} = [a + (p-m)b - c] x \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} + \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m-1|b}}.$$

Es ist also:

$$\sum \left[x \cdot \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} \right] = \frac{1}{a + (p-m)b - c} n \frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}} - \frac{1}{a + (p-m)b - c} \sum \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{n+m-1|b}}.$$

Da nun nach dem Obigen sich leicht ergibt, daß

$$\sum \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m-1|b}} = \frac{1}{a + (p-m+1)b - c} \left(\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m-1|b}} - \frac{a^{p|b}}{c^{m-1|b}} \right),$$

so folgt nach einiger Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} & \sum \left[x \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} \right] \\ &= \frac{1}{[a + (p-m)b - c]^2 b} \left[([a + (p-m)b - c]n - (c + (m-1)b)) \frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}} + \frac{a^{p|b}}{c^{m-1|b}} \right]. \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + n \cdot \frac{1^{n-1/2}}{2^{n/2}} = n \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}}.$$

$$1 + 2 \cdot \frac{2}{1 \cdot 3} + 3 \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + n \cdot \frac{2^{n-1/2}}{1^{n/2}} = \frac{n+1}{3} \cdot \frac{2^{n/2}}{1^{n/2}} - \frac{1}{3}.$$

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + 4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + n \cdot \frac{1^{n-1/2}}{2^{n-1/2}} = \frac{n+2}{3} \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n-1/2}}.$$

$$1 + 2 \cdot \frac{2}{1} + 3 \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} + 4 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + n \cdot \frac{2^{n-1/2}}{1^{n-1/2}} = \frac{1}{5} \left[(n+1) \cdot \frac{2^{n/2}}{1^{n-1/2}} + 1 \right].$$

$$1 + 2 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} + \dots + n \cdot \frac{2^{n/2}}{2^{n-1/2}} = \frac{3n+2}{15} \cdot \frac{1^{n+1/2}}{2^{n-1/2}}.$$

$$2 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 4}{1} + 3 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3} + \dots + n \cdot \frac{2^{n/2}}{1^{n-1/2}} = \frac{1}{5 \cdot 7} \left[(5n+3) \cdot \frac{2^{n+1/2}}{1^{n-1/2}} + 6 \right].$$

4) Setzt man allgemein $f_x = \frac{x^{k/1}}{k!} \cdot \frac{a^{x+p/b}}{c^{x+m/b}}$, so ist

$$f_x - f_{x-1} = [a + (p-m)b - c] \cdot \frac{x^{k/1}}{k!} \cdot \frac{a^{x+p/b}}{c^{x+m/b}} + \frac{x^{k-1/1}}{(k-1)!} \cdot \frac{a^{x+p-1/b}}{c^{x+m-1/b}}, \text{ also:}$$

$$\sum \left(\frac{x^{k/1}}{k!} \cdot \frac{a^{x+p-1/b}}{c^{x+m/b}} \right) = \frac{1}{a + (p-m)b - c} \cdot \frac{n^{k/1}}{k!} \cdot \frac{a^{n+p/b}}{c^{n-m/b}}.$$

$$- \frac{1}{a + (p-m)b - c} \sum \frac{x^{k-1/1}}{(k-1)!} \cdot \frac{a^{x+p-1/b}}{c^{x+m-1/b}}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} + 6 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1^{n-1/2}}{2^{n/2}} = \frac{n(n+5)}{6} \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}}.$$

$$\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} = \frac{n(3n+7)}{30} \cdot \frac{1^{n+1/2}}{2^{n/2}}.$$

$$1 + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} + 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n-1/2}} = \frac{15n^2 + 39n + 16}{210} \cdot \frac{1^{n+1/2}}{2^{n-1/2}}.$$

$$\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} + 10 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{n^{3/1}}{3!} \cdot \frac{1^{n-1/2}}{2^{n/2}} = \frac{n(n^2 + 7n + 22)}{30} \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + 10 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{n^{3!}}{3!} \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} &= \frac{n(5n^2 + 27n + 38)}{210} \cdot \frac{1^{n+1/2}}{2^{n/2}} \\ 1 + 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} + 10 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{n^{3!}}{3!} \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n-1/2}} \\ &= \frac{35n^3 + 195n^2 + 304n + 96}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \frac{1^{n+1/2}}{2^{n-1/2}} \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $n^2 = n^{2!} - n$ und $n^3 = n^{3!} - 3n^{2!} + n$ u. f. f., so kann man die vorstehenden Reihen auch für den Fall leicht summiren, wenn die Coefficienten der einzelnen Glieder nach Potenzen der natürlichen Zahlen fortschreiten.

Beispiele:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + 9 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + n^2 \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} &= \frac{n(3n+2)}{15} \cdot \frac{1^{n+1/2}}{2^{n/2}} \\ \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + 27 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + n^3 \cdot \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} &= \frac{n(15n^2 + 18n + 2)}{105} \cdot \frac{1^{n+1/2}}{2^{n/2}} \end{aligned}$$

§. 16. Unendliche Reihen.

1) Es entsteht nun die Frage, ob Reihen von der im vorigen Paragraphen betrachteten Form unter gewissen Umständen auch als unendliche Reihen summirbar sind. Diese Frage hängt mit der andern zusammen, welchen Werth der Quotient $\frac{a^{n/b}}{c^{n/b}}$ für $n = \infty$ annimmt. Ist $a = c$, so ist offenbar der Werth dieses Quotienten der Einheit gleich; ist aber $a > c$, so ist dieser Werth unendlich groß. Setzt man $a = c + d$, so wird

$$\frac{a^{n/b}}{c^{n/b}} = \left(1 + \frac{d}{c}\right) \left(1 + \frac{d}{c+b}\right) \left(1 + \frac{d}{c+2b}\right) \cdots \left(1 + \frac{d}{c+(n-1)b}\right).$$

Wird die Multiplication auf der rechten Seite ausgeführt, so folgt:

$$1 + d \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{c+2b} + \cdots + \frac{1}{c+(n-1)b} \right) + d^2 (\cdots) \cdots$$

Da aber die im zweiten Gliede dieser Entwicklung enthaltene harmonische Reihe

$$\frac{1}{c'} \quad \frac{1}{c+b'} \quad \frac{1}{c+2b'} \quad \cdots \quad \frac{1}{c+(n-1)b'}$$

für $n = \infty$ einen unendlich großen Werth hat, für welche Behauptung der bekannte Beweis hier übergangen werden kann, so ist auch der Quotient $\frac{a^{n/b}}{c^{n/b}}$ für $a > c$ und $n = \infty$ unendlich groß. Sofort folgt nun, daß dieser Quotient für $a < c$ und $n = \infty$ verschwindend klein wird.

2) Nun ist $\frac{a^{n+p/b}}{c^{n+m/b}} = \frac{a^{p/b} \cdot (a+pb)^{n/b}}{c^{m/b} \cdot (c+mb)^{n/b}}$. Wenden wir hierauf die eben gewonnenen Resultate an, so folgt daß für $n = \infty$

1. der Quotient $\frac{a^{n+p/b}}{c^{n+m/b}}$ endlich und zwar gleich $\frac{a^{p/b}}{c^{m/b}}$ ist,

wenn $a + pb = c + mb$ oder $a = c + (m-p)b$ ist;

2. er ist unendlich groß, wenn $a > c + (m-p)b$ ist;

3. er ist unendlich klein, wenn $a < c + (m-p)b$ ist.

3) Es ist $n^{k/1} \cdot \frac{a^{n+p/b}}{c^{n+m/b}} = \frac{a^{p/b} \cdot (a+pb)^{n/b}}{c^{m-k/b} \cdot [c+(m-k)b]^{n/b}} \cdot \frac{n^{k/1}}{[c+(m+n-k)b]^{k/b}}$.

Der Quotient $\frac{n^{k/1}}{[c+(m+n-k)b]^{k/b}}$ nimmt für $n = \infty$ den Werth $\frac{1}{b^k}$ an, fol-

lich ist der Quotient $n^{k/1} \cdot \frac{a^{n+p/b}}{c^{n+m/b}}$ für $n = \infty$ und für $a = c + (m-p-k)b$ gleich

$\frac{a^{p/b}}{b^k \cdot c^{m-k/b}}$; er ist unendlich groß, wenn $a > c + (m-p-k)b$ ist, und er ist unendlich klein, wenn $a < c + (m-p-k)b$ ist.

Hiernach können nun die oben aufgestellten allgemeinen Summenformeln untersucht werden. Sollen die Reihen auch als unendliche summierbar sein, so muß in der Summenformel das den Buchstaben n enthaltende Glied für $n = \infty$ entweder endlich oder unendlich klein werden. Da der erste Fall nur eintreten kann, wenn die Differenz von a und c ein Vielfaches von b ist, so gehören die betreffenden Reihen früheren einfacheren Formen an und können hier übergangen werden; es bleibt also nur der Fall zu untersuchen, wenn diese Glieder der Summenformel verschwinden.

4) Wenden wir nun das gefundene Merkmal des Verschwindens von $n^{k/1} \cdot \frac{a^{n+p/b}}{c^{n+m/b}}$ für $n = \infty$ auf die im vorigen Paragraph gefundenen Summenformeln an, so erhält man folgende Summen:

$$\sum_1^{\infty} \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{c+(m-p)b-a} \cdot \frac{a^{p|b}}{c^{m|b}}, \text{ wenn } a < c+(m-p)b.$$

$$\sum_1^{\infty} x \cdot \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{[c+(m-p-1)b-a]^{2|b}} \cdot \frac{a^{p|b}}{c^{m-1|b}}, \text{ wenn } a < c+(m-p-1)b.$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{x^{k|1}}{k!} \cdot \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{c+(m-p)b-a} \sum_1^{\infty} \frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!} \cdot \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m-1|b}},$$

wenn $a < c+(m-p-k)b$.

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel erhält man:

$$\sum_1^{\infty} \frac{x^{k|1}}{k!} \cdot \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{[c+(m-p-k)b-a]^{k+1|b}} \cdot \frac{a^{p|b}}{c^{m-k|b}}, \text{ wenn } a < c+(m-p-k)b.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \text{ in inf. } = 1.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots \text{ in inf. } = 1.$$

$$1 + \frac{1 \cdot 3}{6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots \text{ in inf. } = 4.$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1 \cdot 2}{n(n+1)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \text{ in inf.}$$

$$= \frac{1}{n-2}, \text{ wenn } n > 2.$$

$$\frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{n(n+1)} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)} + 4 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \text{ in inf.}$$

$$= \frac{n-1}{(n-2)(n-3)}, \text{ wenn } n > 3.$$

5. Summirung der Werthe goniometrischer Funktionen.

§. 17. Einfache goniometrische Reihen.

1) Setzt man $f_x = \sin. (\alpha + x\beta)$, so ist

$$f_x - f_{x-1} = \sin. (\alpha + x\beta) - \sin. (\alpha + (x-1)\beta) = 2 \sin. \frac{\beta}{2} \cos. \left[\alpha + \left(x - \frac{1}{2} \right) \beta \right].$$