7. Sekundärliteratur

Zu der öffentlichen Prüfung, welche mit den Zöglingen der Realschule I. Ordnung im Waisenhause zu Halle am ... in dem Versammlungssaale des neuen ...

Halle (Saale), 1838

Die Theorie der Spiegel für den Schulunterricht.

urn:nbn:de:hbz:061:1-181344

Die Theorie der Spiegel für den Schulunterricht.*)

§. 1.

Erklärungen. Spiegel sind glatte, polirte Flächen; deßhalb und in Folge des Reflexionsgesetzes geben sie von leuchtenden Gegenständen Bilder. Man scheidet ebene und gekrümmte (sphärische, elliptische, parabolische) Spiegel.

§. 2.

Ebene Spiegel. 1) Die vom ebenen Spiegel reflectirten Strahlen eines leuchtenden Punktes schneiden sich verlängert sämmtlich in einem Punkte (Bildpunkt) hinter dem Spiegel; 2) der Bildpunkt liegt in dem verlängerten Lothe vom leuchtenden Punkte auf den Spiegel ebenso weit hinter demselben, als der leuchtende Punkt vor demselben liegt.

(Fig. 1.) Beweis. Sei A der leuchtende Punkt, MN der Spiegelschnitt durch eine durch A gehende lothrechte Ebene. Aus dem Reflexionsgesetze und daraus daß der Spiegel eben (also FE und GD Lothe auf MN und nicht bloß auf dem unendlich kleinen Flächenstückchen E und D), folgt $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ und $\triangle AEC \cong \triangle B'EC$, mithin $B'C = BC$ und $AC = BC$.

(Fig. 2.) Anmerkung: 1) Da ein Gegenstand als eine Summe von leuchtenden (in eignem, oder reflectirtem Lichte) Punkten anzusehen ist, deren jeder seinen Bildpunkt hinter dem Spiegel haben muß, so folgt daraus die einfache Construction der Bilder von Gegenständen, daß man von Punkten ihrer Peripherie Lothe auf den Spiegel (oder dessen Verlängerung) fällt, diese um sich verlängert und die erhaltenen Endpunkte geeignet verbindet. Gegenstand und Bild sind in Bezug auf die spiegelnde Ebene symmetrisch (übereinstimmend in ihren Theilen, ohne congruent zu sein; das Rechts des Gegenstandes wird das Links des Bildes; dessen Oben und Unten bleibt übereinstimmend).

§. 3.

Der **Winkelspiegel** (zwei unter einem beliebigen Winkel zusammengestellte ebene Spiegel). 1) Allgemeine Lage der Bilder: Alle Bilder eines zwischenstehen-

*) Diese Abhandlung mit ihren Aufgabenanhängen möge unter dem Gesichtspunkte eines Abschnitts eines vom Verf. demnächst erscheinenden Lehrbuches betrachtet werden.

den leuchtenden Punktes liegen in einer durch diesen lothrecht zur gemeinsamen Kante gelegten Ebene und zwar auf der Kreislinie, welche den Abstand des leuchtenden Punktes von der Kante zum Radius und den Schnittpunkt dieser mit jener Ebene zum Mittelpunkt hat.

(Fig. 3.) Beweis. Man vergegenwärtige sich die Constructionsart der Bilder, Ist L der leuchtende Punkt und ACB die Schnittfigur des Winkelspiegels, so werden die von L auf beide Spiegel gefällten Lothe um sich selbst verlängert; man erhält die Bilder A_1 und B_1, welche für die Spiegel BC und AC leuchtende Punkte sind; ganz auf dieselbe Weise erhält man deren Bildpunkte A_2 und B_2 2c. Daher müssen die $\Delta\Delta\, LCA_1$, A_1CA_2, A_2CA_3 2c. und LCB_1, B_1CB_2 2c. gleichschenklig sein, woraus folgt daß sämmtliche Bildpunkte von C den gleichen Abstand CL haben. Daß sie sämmtlich in derselben Ebene mit L liegen, die lothrecht auf der Kante beider Spiegel steht, folgt aus der Constructionsart der Bilder.

2) Bogen-Entfernung der Bilder vom leuchtenden Gegenstande: Die geradzahligen Bilder (das 2., 4., ... 2n.) haben dasselbe geradzahlige Vielfache des Spiegelwinkels (α) als Entfernung vom Gegenstande (also 2α, 4α, ... $2n\alpha$); die Entfernung jedes ungeradzahligen unterscheidet sich von der des voraufgehenden geradzahligen um den doppelten Bogen zwischen Gegenstand und Spiegel, auf dessen Seite das Bild liegt.

Beweis. Es ist zu beweisen, daß

$$\left.\begin{aligned} LA_{2n} &= LB_{2n} = 2n\alpha, \\ LA_{2n+1} &= 2n\alpha + 2\mu, \\ LB_{2n+1} &= 2n\alpha + 2\nu \text{ ist,} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{wenn } \measuredangle\, ACL = \mu, \\ \measuredangle\, BCL = \nu \text{ und für} \\ \text{n nacheinander } 1,\ 2, \\ 3\ \ldots.\ \text{gesetzt wird.} \end{array}$$

Die Bogenentfernungen $LA_1 \ldots. LA_n$ und $LB_1 \ldots. LB_n$ sind nacheinander aufzustellen, indem man berücksichtigt, daß die an den Bildpunkten liegenden Peripherie-Winkel sämmtlich $= \alpha$ sind und mithin der zugehörige Centriwinkel $= 2\alpha$.

Folgerung: a) Die geradzahligen Bilder mit gleichem Index haben alle dieselbe Bogenentfernung vom leuchtenden Gegenstande. b) Dreht sich der Winkelspiegel um seine feste Schnittkante als Axe, so ändern nur die ungeradzahligen Bilder ihren Ort.

3) Bogen-Entfernung der Bilder von einander: Ihre Entfernungen von einander alterniren zwischen der zweifachen Bogenentfernung des Gegenstandes von jedem Spiegel und zwar ist die Folge hinter dem einen Spiegel die umgekehrte von der hinter dem andern.

Beweis. Aus Beweis (2) durch Subtraction und Substitution von $\mu + \nu$ für α.

Folgerung: Ist der Gegenstand gleichweit von beiden Spiegeln entfernt, so haben sämmtliche Bilder von einander gleiche Entfernung und zwar die des Gegenstandes von jedem der beiden ersten Bilder.

4) Bilderzahl: Ist der Bogen des Spiegelwinkels $\frac{1}{n}$ des Kreisumfangs, so entstehen, falls $\frac{360}{\alpha} = n$ eine **ganze** Zahl ist, bald $n - 1$, bald n Bilder. Es entstehen stets nur $n - 1$ Bilder, wenn n 1) gerade, 2) wohl ungerade ist, aber der Gegenstand in der Mitte des Bogens des Spiegelwinkels steht. Ist n ungerade und hat der Gegenstand nicht von beiden Spiegeln dieselbe Entfernung, so entstehen n Bilder.

Beweis. Ist n gerade, dann ist $\frac{n}{2}$ entweder gerade oder ungerade. Ist n ungerade, dann kann $\frac{n-1}{2}$ gerade oder ungerade sein. Für alle vier Fälle sei gemeinschaftlich angenommen, daß $\frac{n}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ eine Anzahl Bilder sei, hinter jedem Spiegel entstanden. Dann läßt sich für das $\frac{n}{2}$te und $\frac{n-1}{2}$te Bild (gerade oder ungerade) aus Beweis (2) seine Entfernung vom Gegenstande L angeben.

1) Das $\frac{n}{2}$te (gerade) Bild ist auf beiden Seiten von L um $\frac{n}{2}\alpha$ entfernt. Die Summe beider Entfernungen ist $n\alpha = 360^0$, also die ganze Peripherie. Es fallen also in diesem Falle die $\frac{n}{2}$ten Bilder mit dem Durchmesser durch den Gegenstand gezogen zusammen und es können nur $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1 = n - 1$ Bilder entstehen.

2) Das $\frac{n}{2}$te (ungerade) Bild ist auf beiden Seiten von L resp. um $\left(\frac{n}{2} - 1\right)\alpha + 2\mu$ und $\left(\frac{n}{2} - 1\right)\alpha + 2\nu$ entfernt. Die Summe ihrer Entfernungen giebt wieder $n\alpha = 360^0$. Es fällt also wieder das $\frac{n}{2}$te Bild beider Seiten zusammen, aber dies Mal nur dann auf den Durchmesser durch den Gegenstand, wenn $\mu = \nu$ ist; mithin kann es auch für diesen Fall nur $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1 = n - 1$ Bilder geben.

3) Das $\frac{n-1}{2}$te (gerade) Bild ist auf beiden Seiten von L $\frac{n-1}{2}\alpha$ entfernt; die Summe beider Entfernungen beträgt $(n-1)\alpha = \left(\frac{360}{\alpha} - 1\right)\alpha = 360 - \alpha$. Zwischen beiden $\frac{n-1}{2}$ten Bildern liegt also ein Winkel gleich dem Spiegelwinkel, in welchen kein Bild mehr hineinfallen kann, wenn L gleiche Entfernung von beiden Spiegeln hat, da diese letzten Bilder auf die Verlängerung der Spiegel in diesem Falle fallen. Ist aber $\mu \gtrless \nu$, so muß das eine von den beiden $\frac{n-1}{2}$ten Bildern zwischen die Verlängerung, also hinter beide Spiegel fallen und kann kein Bild weiter geben, das andere aber, da es um α von ihm entfernt ist, vor den einen Spiegel, giebt also noch ein Bild. Mithin wenn $\mu = \nu$, giebt es $\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n - 1$ Bilder, wenn aber $\mu \gtrless \nu$, so giebt es $\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 1 = n$ Bilder.

4) Das $\frac{n-1}{2}$te (ungerade) Bild ist auf beiden Seiten von L resp. um $\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)\alpha + 2\mu$ und $\left(\frac{n-1}{2} - 1\right)\alpha + 2\nu$ entfernt. Die Summe dieser Entfernungen giebt wieder $(n-1)\alpha = 360 - \alpha$. Hieran knüpft sich dieselbe Bemerkung wie im Falle (3).

Folgerung: a) Ist n gerade, so fällt das $\frac{n}{2}$te Bild auf der Seite des einen Spiegels mit dem $\frac{n}{2}$ten auf der des andern zusammen und zwar nur dann auf dem durch den Gegenstand gezogenen Durchmesser, wenn entweder $\mu = \nu$, oder, wenn das nicht, wenigstens $\frac{n}{2}$ gerade ist. b) Ist n ungerade, so liegt zwischen den $\frac{n-1}{2}$ten Bildern auf beiden Seiten ein Winkel gleich dem Spiegelwinkel, die letzten Bilder also auf den Spiegelverlängerungen, wenn der Gegenstand von beiden Spiegeln gleiche Entfernung hat.

§. 4.

Fragen und Aufgaben zu §§. 1—3.

1) Wodurch unterscheidet sich die regelmäßige Reflexion von der unregelmäßigen? Wirkung beider.

2) Beim Wollaston-Babinet'schen Reflexions-Goniometer ist der Winkel α, um welchen die mit der Axe des Tischleins fest verbundene Schiene zu drehen ist, der Nebenwinkel des zu messenden Krystallwinkels, dieser also $180 - \alpha$; warum?
3) Beim Spiegelsextanten ist der Drehungswinkel α des Spiegels nur die Hälfte des zu messenden Winkel-Abstandes k, also $k = 2\alpha$; warum?
4) Beim Meyersteinschen Heliostaten muß der Planspiegel mit der Weltaxe stets den Winkel $90 - \frac{\alpha}{2}$ bilden, wo α die Poldistanz der Sonne bedeutet; warum?
5) Auf welche Weise ist die Höhe einer Pappel mittelst eines in einiger Ferne horizontal gelegten Spiegels zu messen?
6) Wie hoch muß mindestens ein zu einer Person parallel gestellter Spiegel sein, wenn diese in demselben sich ganz sehen will?
7) Ein Planspiegel ist um eine seiner Kanten als Axe drehbar; es ist a) der Weg des Bildes eines Gegenstandes in der Entfernung e von der Kante zu bestimmen; b) zu beweisen, daß sich das Bild um $2\alpha^0$ bewegt, wenn sich der Spiegel um α dreht.
8) Vor einem ebenen Spiegel befinde sich ein Gegenstand und irgend ein Punkt sei der Ort eines Auges. Es ist der Gang nur derjenigen reflectirten Strahlen durch Zeichnung darzustellen, die von drei Punkten des Gegenstandes allein ins Auge gelangen.
9) In der lothrechten Schnittebene zweier um 6^{dcm} von einander entfernter paralleler Spiegel befindet sich 2^{dcm} von dem einen ein Gegenstand und irgendwo in der Ebene sei der Ort eines Auges. a) Durch Zeichnung und Rechnung ist die Lage der Bilder in jedem Spiegel zu finden. — b) Wie viele Bilder entstehen? (Die Antwort ist aus den Gesetzen vom Winkelspiegel zu begründen.) c) Durch zwei Zeichnungen ist der Gang nur der reflectirten Strahlen darzustellen, die allein ins Auge fallen, wenn sich dasselbe nach jedem der beiden Spiegel wendet.
10) Wie steht es beim Winkelspiegel mit der Bilderanzahl, wenn $\frac{360}{\alpha} = n$ keine ganze Zahl ist?
11) Wann entstehen im Winkelspiegel 5, wann 7 Bilder? Lage des 5. und 7. Bildes unter Angabe des Grundes! Wann entstehen 9 (!) Bilder? Wann entstehen beim Winkelspiegel von 120^0 drei, wann nur zwei Bilder? Liegen bei zwei parallelen Spiegeln die Bilder auch in einer Kreislinie?
12) Welches Kaleidoscop liefert regelmäßige sechseckige Sterne?

13) Gegeben sei ein Winkelspiegel von 72°; in einer zur gemeinschaftlichen Kante lothrechten Schnittfläche sei ein Mal in 36°, das zweite Mal in 18° Entfernung ein leuchtender Punkt und beliebig der Ort eines Auges gegeben; a) es sollen alle Bilder durch Zeichnung gefunden werden. b) Die Winkelentfernung der Bilder von einander und vom leuchtenden Punkte soll in beiden Fällen festgestellt werden. c) Durch Zeichnung sind alle die reflectirten Strahlen darzustellen, die im letzteren Falle allein ins Auge gelangen.

§. 5.

Erklärungen: Die Calotte einer Hohlkugel heißt, innen polirt, Concav- (Hohl-) Spiegel, außen polirt, Convexspiegel; die zugleich außen und innen polirte Calotte heißt sphärischer Doppelspiegel. Er ist aufzufassen als eine Folge unendlich kleiner, beiderseitig polirter Ebenen, deren Einfallslothe aber nicht untereinander parallel sind (Unterschied vom Planspiegel), sondern sämmtlich in einem Punkte (dem Kugelmittelpunkte) sich schneiden; dieser heißt der Krümmungsmittelpunkt des Spiegels, sein Abstand vom Spiegel Krümmungsradius. Alle Punkte des sphärischen Spiegels reflectiren auffallende Strahlen demnach so, als ob sie von den Tangential-Ebenen dieser Punkte nach dem Reflexionsgesetz reflectirt würden. — Die Mitte des Spiegels heißt sein Scheitel oder auch sein optischer Mittelpunkt; er theilt die Hauptaxe — die Linie, in welcher der optische und Krümmungsmittelpunkt liegt — in eine positive und eine negative Seite; die für den Concavspiegel positive Seite der Hauptaxe (in der Richtung der einfallenden Lichtstrahlen) ist zugleich die negative für den Convexspiegel und umgekehrt; jede der unzählig vielen durch den Krümmungsmittelpunkt nach dem Spiegel gezogenen Linien heißt secundäre Axe. Jede zwei entgegengesetzte Randpunkte des Spiegels verbindende Linie heißt sein Durchmesser, der Centriwinkel jedes Axenschnittes des Spiegels seine Apertur. Die in der Nähe des optischen Mittelpunktes einfallenden Strahlen heißen zum Unterschiede von den Randstrahlen Centralstrahlen. Längenabweichung heißt das Stück der Hauptaxe, durch welches sämmtliche von einem leuchtenden Punkte einfallende Strahlen reflectirt hindurchgehen; die Seitenabweichung irgend eines Axenschnittes des Spiegels ist das im Vereinigungspunkte der Centralstrahlen in der Axe errichtete Loth bis zum Schnitt mit dem äußersten reflectirten Randstrahl. — Wir erhalten noch andere gekrümmte Concav- und Convex-Spiegel, wenn wir durch ein Hohl-Ellipsoid, Hohl-Paraboloid senkrecht zur Hauptaxe einen Schnitt legen. Da die elliptischen und parabolischen Spiegel nur eine spärliche Anwendung finden, stellen wir hier nur die Gesetze für den sphärischen Doppelspiegel auf. Die Hauptfrage, um die es sich hier handelt, ist die nach dem Orte, wo irgend ein einfallender (parallel, divergent, convergent zur Hauptaxe) Strahl die Hauptaxe schneidet.

§. 6.

(Fig. 4.) **Der sphärische Doppelspiegel:** 1) Jeder von einem sphärischen Doppelspiegel reflectirte **divergente** Strahl schneidet (direct oder rückwärts verlängert) die Hauptaxe in einem Punkte, dessen Entfernung (b) vom Scheitel des Spiegels durch die Gleichung bestimmt wird

$$(1) \quad b = 2f - \frac{f(g \mp 2f)}{(g \mp 2f) \cos\alpha \pm f},$$

in welcher die obern Vorzeichen gelten, wenn der leuchtende Punkt auf der concaven, die untern, wenn er auf der convexen Spiegelseite steht.

Beweis. Es sei SS' der Axenschnitt eines sphärischen Doppelspiegels; in dieser Schnittebene sende von der Axe LL' aus auf die concave Seite der Punkt L den Lichtstrahl LA, auf die convexe der Punkt L' den Strahl L'A. Ersterer werde, wenn CA der Radius, also das Einfallsloth ist, nach B, letzterer nach E reflectirt und schneide rückwärts verlängert die Axe in B'. Es ist DB und DB' zu bestimmen. Die Abstände der leuchtenden Punkte DL und DL' seien gemeinschaftlich mit g, die der Schnittpunkte der reflectirten Strahlen DB und DB' mit b, $CA = r = 2f$ bezeichnet. Der Spiegelpunkt A habe die Winkelferne α von der Axe.

Aus den $\Delta\Delta$ LAC (resp. L_1AC) und BAC (resp. B'AC) ist 2mal der Werth für tang β (resp. tang β') mittelst des Sinussatzes aufzustellen:

$$\operatorname{tang}\begin{pmatrix}\beta\\ \beta'\end{pmatrix} = \frac{(g \mp 2f)\sin\alpha}{(g \mp 2f)\cos\alpha \pm 2f}; \quad \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\beta' = \frac{(2f - b)\sin\alpha}{2f - (2f - b)\cos\alpha};$$

setzen wir beide Werthe gleich und lösen die Gleichung nach b auf, so erhalten wir die Gleichung (1).

Folgerung: Die Strahlen der von L und L' ausgehenden Strahlenkegel können reflectirt nicht alle durch denselben Punkt der Axe gehen; der Schnittpunkt der reflectirten Strahlen, die von einem gemeinschaftlichen Kreise um den optischen Mittelpunkt vom Spiegel ausgehen, entfernt sich ebenso continuirlich vom Scheitel, je näher demselben die getroffenen Spiegelpunkte rücken. (Aus (1) ersichtlich, wenn man α continuirlich abnehmen läßt.)

2) Jeder von einem sphärischen Doppelspiegel reflectirte **parallele** (zur Axe) Strahl (d. h. von einem Punkte der Axe kommend, der im Unendlichen liegt) schneidet (direct oder rückwärts verlängert) die Hauptaxe in einem Punkte,

dessen Entfernung (b) vom Scheitel des Spiegels durch die Gleichung bestimmt wird:

$$(2)\quad b = 2f - \frac{f}{\cos\alpha}.$$

Beweis: Dividire Zähler und Nenner in Gleichung (1) durch $(g \mp 2f)$ und setze $g = \infty$.

Folgerung: 1) Hat der vom parallelen Strahl auf der concaven und convexen Seite getroffene Spiegelpunkt dieselbe Winkelerhebung (α) von der Hauptaxe, d. h. bilden beide Parallelstrahlen eine Gerade, so schneiden die reflectirten Strahlen die Axe in demselben Punkte.

Folgerung: 2) Bilden die Treffpunkte der parallelen Strahlen auf beiden Spiegelseiten gleiche Kreise um den Scheitel des Spiegels als Mittelpunkt, so gehen die Strahlen dieser gleichen Kreise reflectirt durch denselben Axenpunkt.

Folgerung: 3) Je mehr sich diese Strahlenkreise dem Scheitel nähern, um so mehr entfernt sich von diesem der Schnittpunkt ihrer reflectirten Strahlen und umgekehrt. (Man läßt in Gleichung (2) α allmälig sich der 0 nähern.)

3) (Fig. 5.) Die **convergenten Strahlen** (z. B. die bei einer Convexlinse austretenden, aber vom Convex- oder Hohlspiegel noch vor ihrer Vereinigung aufgefangenen), deren **Verlängerungen** erst in einem Axenpunkte sich schneiden, also von einem Punkte **hinter dem Spiegel (virtueller leuchtender Punkt)** herzukommen scheinen, schneiden sich reflectirt in einem Punkte der Hauptaxe, dessen Entfernung (b) vom Scheitel des Spiegels durch die Gleichung bestimmt wird:

$$(3)\quad b = 2f - \frac{f(g \pm 2f)}{(g \pm 2f)\cos\alpha \mp f'}$$

worin die oberen Vorzeichen für die auf den Concav-, die unteren für die auf den Convexspiegel auffallenden convergenten Strahlen gelten.

Beweis: Der auf den Convexspiegel SS auffallende convergente Strahl L'A, der verlängert die Axe in L schneidet, also von da herzukommen scheint, wird in der Richtung AE' reflectirt, ein Strahl, der rückwärts verlängert, die Axe in B schneidet, also von da herzukommen scheint. Es ist mithin DB zu suchen. Offenbar hat diese Convex-Spiegel-Aufgabe für convergente Strahlen sich in eine in (1) schon behandelte Concav-Spiegel-Aufgabe für divergente Strahlen verwandelt; wir müssen also für DB die Gleichung (1) mit den oberen Vorzeichen, d. i. die Gleichung (3) mit den untern erhalten.

Der auf den Concavspiegel SS auffallende convergente Strahl LA, der rückwärts verlängert, die Axe in L' schneidet, also von da herzukommen scheint, schneidet, reflectirt, die Axe in B'; es ist demnach DB' zu suchen. Offenbar aber ist unsere Concav-Spiegelaufgabe für convergente Strahlen identisch mit der schon in (1) behandelten Convex-Spiegelaufgabe für divergente Strahlen. Wir müssen also auch die Gleichung (1) mit den unteren Vorzeichen, d. i. die Gleichung (3) mit den oberen erhalten.

1) Folgerung (aus Satz 1—3): Für alle leuchtenden Punkte, auch die virtuellen, auf der Axe der concaven Seite gilt die Gleichung $b = 2f - \frac{f(g-2f)}{(g-2f)\cos\alpha + f}$; und für alle leuchtenden Axenpunkte auf der convexen Seite, auch für die virtuellen oder für die Vereinigungspunkte der convergenten Strahlen des Concavspiegels, gilt die Gleichung $b = 2f - \frac{f(g+2f)}{(g+2f)\cos\alpha - f}$.

2) Folgerung: Nennen wir, vom Scheitel aus gerechnet, die Axe der Concavseite die positive, also alle Entfernungen der reellen und virtuellen leuchtenden Punkte $+g$, dagegen die Axe der Convexseite die negative (also für alle Entfernungen g des virtuellen und reellen leuchtenden Punktes auf ihr $-g$ gesetzt), so lassen sich alle Gleichungen von 1 und 3 durch die eine ersetzen $b = 2f - \frac{f(g-2f)}{(g-2f)\cos\alpha + f}$, welche die Hauptgleichung des Concav-Convexspiegels heißen soll.

3) Folgerung: Der Spiegel mag eine beliebige Apertur (2α) haben, der Schnittpunkt der reflectirten Randstrahlen auf der Axe ist vom Scheitel im Minimum ($\alpha = 90$) $= 4f \mp g$ (das obere Vorzeichen für alle leuchtenden Punkte auf der Concavseite, das untere für die auf der Convexseite) entfernt. Daraus folgt, daß bei Spiegeln mit der Apertur 180^0 der reflectirte äußerste Randstrahl durch den optischen Mittelpunkt für zwei Stellen des leuchtenden Punkts auf der Axe geht; sie liegen zu beiden Seiten des optischen Mittelpunktes um 4f entfernt.

4) Die **divergenten Centralstrahlen** eines leuchtenden Axenpunktes schneiden sich reflectirt sämmtlich nahezu in **einem** Punkte der Hauptaxe — dem **Bildpunkte** oder **Bilde** des leuchtenden Punktes — dessen Entfernung (b) durch die Gleichung bestimmt wird:

$$(4) \quad b = \frac{gf}{g \mp f}, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} \mp \frac{1}{g},$$

worin die obern Vorzeichen gelten, wenn der leuchtende Punkt auf der concaven, die untern, wenn er auf der convexen Spiegelseite steht.

Beweis: Aus Gleichung (1) herzuleiten für $\alpha = 0$. Die zweite Form wird erhalten, wenn der reduzirte Ausdruck durch bfg dividirt wird.

5) Die **parallelen Centralstrahlen** beider Spiegel schneiden sich, reflectirt, sämmtlich nahezu in **einem** Punkte der Hauptaxe, welcher der **Focus (Brennpunkt) des Concavspiegels** und zugleich der **Zerstreuungspunkt des Convexspiegels** heißt; seine Entfernung (b) vom optischen Mittelpunkte wird durch die Gleichung bestimmt

$$(5) \quad b = f = \frac{r}{2}.$$

Beweis: Entweder aus Gleichung (2) für $\alpha = 0$ herzuleiten, oder aus Gleichung (4), wenn man Zähler und Nenner mit g dividirt und dann $g = \infty$ setzt.

Anmerkung 1): Der Focus und der Zerstreuungspunkt sind also für denselben sphärischen Doppelspiegel, dessen Fläche unendlich dünn angenommen wird, derselbe Punkt; er liegt auf der concaven Seite genau in der Mitte zwischen Scheitel und Krümmungsmittelpunkt des Spiegels. Hiermit ist die Bedeutung des in §. 6. 1. angenommenen $r = 2f$ bekannt.

Anmerkung 2): Es ist festzuhalten, daß die Gleichungen 4 und 5 streng nur für Spiegel mit der Apertur $= 0$ gelten, daß also Spiegel mit noch so kleiner Apertur, aber > 0, keine reinen Bilder liefern können; deren Gegenstandspunkte Bildlinien, wenn auch noch so klein, liefern.

(Fig. 6 a und b.) Anmerkung 3): Die Gleichungen (2) und (4) sind auch selbständig (ohne Beziehung auf Gleichung (1)) folgendermaßen zu erhalten:

Aus Δ ABC der ersten Figur folgt mittelst des Sinussatzes $BC = AC \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{f}{\cos \alpha}$; folglich $DB = b = 2f - \frac{f}{\cos \alpha}$.

In Fig. 2 wird angenommen $AL = DL = g$ (resp. $AL' = DL' = g$), $AB = DB = b$ (resp. $AB' = DB' = b$). Dann

$$\frac{BC}{LC} = \frac{b}{g} \text{ oder } 2f - b : g - 2f = b : g$$

$$\text{und } \frac{B'C}{L'C} = \frac{b}{g} \text{ oder } 2f - b : g + 2f = b : g;$$

ausmultiplicirt erhalten wir jede der Gleichungen

$$b = \frac{gf}{g \mp f} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} \mp \frac{1}{g}.$$

6) (Fig. 7 a und b.) Die **convergenten Centralstrahlen** schneiden sich reflectirt in einem Punkte der Hauptaxe, dessen Entfernung (b) vom Scheitel durch die Gleichung bestimmt wird:

$$(6) \quad b = \frac{gf}{g \pm f} \text{ oder } \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \pm \frac{1}{g}$$

worin die obern Vorzeichen für den Concav-, die untern für den Convexspiegel gelten.

Beweis. Entweder aus (3) herzuleiten, indem man $\alpha = 0$ setzt, oder selbständig in der folgenden Weise (analog von 5, Anmerkung 3): Aus den Δs-Paaren LAC, BAC und L'AC, B'AC folgen mittelst des Sinussatzes die Proportionen $g + 2f : 2f - b = g : b$ und $g - 2f : 2f - b = g : b$; woraus durch Ausmultipliciren die Doppel-Gleichung (6) folgt.

1. Anmerkung: Von den Maximumsgleichungen (Gleichung 4—6) für b beim selben g gilt, was in (3) Folgerung (2) von den Gleichungen 1 bis 3 gesagt wurde. Die Gleichungen (4—6) lassen sich in die eine zusammenfassen $b = \frac{gf}{g - f}$ oder $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$, wenn wir für die Entfernung (g) aller (virtuellen, oder reellen) leuchtenden Punkte auf der convexen Seite des Spiegels ($-g$) einsetzen. Diese Gleichung heißt die Hauptgleichung für Centralstrahlen. Da die in der Optik zur Anwendung kommenden sphärischen Spiegel sämmtlich eine kleine Apertur haben, so sind in der Praxis die beiden Gleichungen $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ (für alle leuchtenden Punkte — virtuell und reell — auf der Concav-Seite) und $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ (für alle leuchtenden Punkte — virtuell und reell — auf der Convex-Seite) ausreichend.

2. Anmerkung. Von dem **Orte der Bilder** für die drei Strahlenarten bei jedem der beiden Spiegel (mit kleiner Apertur) können wir uns eine **Anschauung** verschaffen, wenn wir den leuchtenden Punkt successive durch beide Seiten der Hauptaxe wandern lassen und dabei mit Hülfe der Gleichungen (4) in der Form

$b = \dfrac{f}{1 \mp \dfrac{f}{g}}$ den jedesmaligen Ort des Bildes bestimmen. Es ist leicht zu erkennen, daß wenn beim Concavspiegel alle drei Arten Strahlen in der Folge: convergent, parallel, divergent berücksichtigt werden sollen, der leuchtende Punkt seine Wanderung als virtueller am Scheitel beginnen, nach dem ∞ der Convexseite wandern, nach dem ∞ der Concavseite umspringen und von da als reeller nach dem Scheitel des Spiegels wandern muß; daß ferner beim Convexspiegel das Umgekehrte geschehen, der leuchtende Punkt zunächst als virtueller vom Scheitel beginnend nach dem ∞ der Concavseite wandern, sich von da nach dem ∞ der Convexseite umsetzen und als reeller von hier aus dem Scheitel wieder zu wandern muß. Mithin durchläuft, beide Fälle zusammengefaßt, der leuchtende Punkt jede Seite der Hauptaxe zwei Mal, virtuell vom Scheitel nach ∞ und reell von ∞ nach dem Scheitel. Daher erhalten wir aus der Gleichung

I. für die concave Seite: $b = \dfrac{f}{1 - \dfrac{f}{g}}$

II. für die convexe Seite: $b = \dfrac{f}{1 + \dfrac{f}{g}}$

I. wenn $g =$	für $b =$	II. wenn $g =$	für $b =$
∞	f	∞	f
$100f$	$\frac{100}{99}f$	$100f$	$\frac{100}{101}f$
$2f$	$2f$	$2f$	$\frac{2}{3}f$
$1\frac{1}{2}f$	$3f$	$1\frac{1}{2}f$	$\frac{3}{5}f$
f	∞	f	$\frac{1}{2}f$
$\frac{99}{100}f$	$-99f$	$\frac{3}{4}f$	$\frac{3}{7}f$
$\frac{3}{4}f$	$-3f$	$\frac{1}{2}f$	$\frac{1}{3}f$
$\frac{1}{2}f$	$-f$	$\frac{1}{10}f$	$\frac{1}{11}f$
$\frac{1}{10}f$	$-\frac{1}{9}f$	0	$0.$
0	$0.$		

Daraus lesen wir ab: a) für den **Concavspiegel**: Wandert der leuchtende Punkt als virtueller vom Scheitel nach dem ∞ der Convexseite (Schema II. von Unten nach Oben), so wandert das Bild als reelles vom Scheitel nach dem Focus; springt der leuchtende Punkt um nach dem ∞ der Concavseite, um von jetzt ab als reeller nach dem Krümmungsmittelpunkte zu wandern (in Schema I. von Oben nach Unten), so wandert das Bild als reelles vom Focus nach dem Krümmungsmittelpunkte (in welchem beide also zusammenfallen). Geht der leuchtende Punkt nach dem Focus weiter, so das Bild als reelles bis ∞ der Concavseite; wandert jenes vom Focus nach dem Scheitel, so springt das Bild nach dem ∞ der Convexseite um, und wandert als virtuelles nach dem

Scheitel. Mithin sind bei Hohlspiegeln nur für den Fall, daß der leuchtende Punkt zwischen Scheitel und Focus liegt, die Bilder virtuell d. h. auf der Convexseite.

b) für den Convexspiegel: Wandert der leuchtende Punkt als virtueller vom Scheitel nach dem ∞ der Concavseite (in Schema I. von Unten nach Oben), so wandert das Bild als reelles vom Scheitel nach dem ∞ der Convexseite, springt dann (wenn der leuchtende Punkt im Hauptzerstreuungspunkte sich befindet) nach dem ∞ der Concavseite um und wandert als virtuelles Bild bis zum Hauptzerstreuungspunkte. Setzt jener sich aus dem ∞ der Concavseite nach dem ∞ der Convexseite um, um als reeller dem Scheitel zuzuwandern (in Schema II. von Oben nach Unten), so wandert das Bild als virtuelles vom Focus nach dem Scheitel. Also haben hier alle reellen leuchtenden Punkte nur virtuelle Bilder und die reellen Bilder hier rühren nur von convergenten Strahlen her.

Beim Concavspiegel haben **alle** convergenten Strahlen **nur reelle** Bilder, die divergenten haben theils reelle, theils virtuelle.

Beim Convexspiegel haben **alle** divergenten Strahlen **nur virtuelle** Bilder, die convergenten haben theils reelle, theils virtuelle.

In der Wanderung des leuchtenden Punktes auf der Axe und der zugehörigen des Bildpunktes lassen sich vier Abschnitte für beide Spiegel erkennen, die wir für den Concavspiegel auf folgende Weise (Fig. 9.) anschaulich machen: (B bedeutet Bild, G Gegenstand, F, C und D haben die frühere Bedeutung.)

Diese Darstellung giebt zugleich auch die vier Abschnitte der Gegenstands- und Bild-Wanderung für den Convexspiegel, wenn wir die Buchstaben B und G jedes Mal vertauschen.

(Fig. 8.) Eine zweite geometrische Anschauung von den axialen Lagenverhältnissen zwischen leuchtendem und Bildpunkte ist möglich, wenn man bedenkt ((2) Folgerung 1 ist ein specieller Fall davon), daß jeder convergente Strahl auf der einen Seite mit demjenigen divergenten der andern Seite, mit dem er eine Gerade bildet, reflectirt durch denselben Axenpunkt geht. (A bedeute einen Punkt des Axenschnitts beider Spiegel, dem Scheitel D sehr nahe, F Focus, C Krümmungsmittelpunkt, GAG′ den in A auffallenden geradlinigen divergent-convergenten Strahl. BAB′ sei der zugehörige reflectirte Strahl, also B der virtuell-reelle Bildpunkt von dem reell-virtuellen Gegenstandspunkte G). Läßt man nun beide Linien um A jede in der Richtung der beigesetzten Pfeile von 00 anfangend sich um 180° drehen, so werden ihre Axenschnittpunkte G und B von D anfangend nach entgegengesetzten Richtungen beide Seiten der Hauptaxe continuirlich durchlaufen und schließlich in D wieder ankommen. Findet die Bewegung nun so statt, daß folgende untereinanderstehende Winkel gleichzeitig durchlaufen werden:

$$\begin{array}{lllll} \text{von } GG': & \sphericalangle\, DAF & \sphericalangle\, FAC & \sphericalangle\, CA\infty & \sphericalangle\, \infty AD \\ \text{von } BB': & \sphericalangle\, DA\infty & \sphericalangle\, \infty AC & \sphericalangle\, CAF & \sphericalangle\, FAD, \end{array}$$

so erhalten wir zu jedem Axenschnittpunkte G als leuchtenden Punkte einen zugehörigen Axenschnittpunkt B als Bildpunkt für beide Spiegel zugleich. Bei dieser Drehung erlangt der Scheitelwinkel zwischen beiden Linien das Maximum 180^0 in der Richtung CA, der des Einfallsloths, was bedeutet, daß der einfallende Strahl mit seinem reflectirten einen $\sphericalangle$ von 0^0 bildet, also auf beiden Spiegelseiten in sich zurückgeworfen wird; dagegen das Minimum 0^0 in der Richtung OO, was bedeutet, daß der einfallende mit seinem reflectirten Strahl in A einen $\sphericalangle$ von 180^0 bildet, also in gerader Linie fortgeht.

7) Der Bildpunkt eines **außerhalb der Axe** liegenden leuchtenden Punktes ist der Schnittpunkt seines durch den Focus resp. Hauptzerstreuungspunktes reflectirten Parallelstrahls und der von ihm aus gezogenen secundären Axe. (Beweis?)

8) **Das Bild eines Gegenstandes** wird gefunden, indem man nach (7) möglichst viele Bildpunkte seiner Grenzpunkte construirt und diese verbindet. (Uebungen siehe in den Aufgaben!)

9) (Fig. 10 a und b.) 1. Die **Größe** des Gegenstands-Bildes wird durch die Gleichung bestimmt

$$(7)\quad B = G \cdot \frac{f}{g \mp f}$$

wo B die Größe des Bildes und G die des Gegenstandes bedeutet; und das obere Vorzeichen gilt, wenn der Gegenstand, virtuell oder reell, sich auf der concaven, das untere Vorzeichen, wenn er sich, virtuell oder reell, auf der convexen Seite befindet.

Beweis. Aus I. und II. folgt $\frac{B}{G} = \frac{EC}{DC} = \frac{2f - b}{g \mp 2f}$; für b ist $\frac{gf}{g \mp f}$ einzusetzen.

Folgerung: Aus Gleichung (7) folgt allgemein für die relative Größe des Bildes: Alle Bilder innerhalb der Focalweite sind kleiner, als der Gegenstand; ebenso sind sie verkleinert zwischen Focus und Krümmungsmittelpunkt. Dagegen sind alle Bilder zwischen Krümmungsmittelpunkt und dem ∞ der Concavseite, sowie alle zwischen dem ∞ der Convexseite und dem Scheitel vergrößert.

2. Die **Lage** des Gegenstandsbildes **in** der Axe geht aus (6) Anmerkung (2) hervor.

3. Die **Lage** des Gegenstandsbildes **zur** Axe: Alle Bilder zwischen dem ∞ der Convexseite und dem Scheitel, sowie die innerhalb der Focalweite sind aufrecht; dagegen sind alle Bilder zwischen Focus und dem ∞ der Concavseite umgekehrt.

Der Beweis folgt aus der Constructionsweise in (8), da, wenn der Gegenstand zwischen Focus und ∞ sich befindet, der reflectirte Parallelstrahl und die secundäre Axe der Hauptaxe zu convergiren und diese in zwei verschiedenen Punkten schneiden; sie müssen sich also jenseits der Hauptaxe schneiden; dagegen wenn der Gegenstand zwischen dem Focus und optischen Mittelpunkte liegt, die secundäre Axe irgend eines Gegenstandspunktes und der reflectirte Parallelstrahl von der Axe ab convergiren, sich also auf derselben Seite der Hauptaxe schneiden. Befindet sich der Gegenstand auf der convexen Seite, so convergiren die secundäre Axe eines Gegenstandspunktes und der reflectirte Parallelstrahl zwar der Axe zu, aber letzterer stärker, als ersterer, müssen sich also vor dem Durchgange schneiden; mithin liegt der Bildpunkt auf derselben Seite der Hauptaxe.

10) Da (siehe Folgerung in (1) und Anmerkung 3 in (3)) der Randstrahl eines leuchtenden Axenpunktes reflectirt durch einen Axenpunkt geht, der dem Spiegelscheitel näher liegt, als der Durchgangspunkt eines reflectirten Centralstrahls, so haben **Spiegel mit großer Apertur** stets eine **Längenabweichung** (l), die durch die Gleichung bestimmt wird

$$(8) \quad l = \frac{f(g \mp 2f)}{(g \mp 2f)\cos\alpha \pm f} - \frac{f(g \mp 2f)}{g \mp f},$$

in welcher die obern Vorzeichen für alle reellen und virtuellen leuchtenden Axenpunkte auf der concaven, die untern für die auf der convexen Spiegelseite gelten. (Siehe (3) Folgerung 2; und (6) Anmerkung 1.)

Beweis: Die Längenabweichung wird erhalten, wenn man von dem Abstande des Axen-Schnittpunkts des reflectirten centralsten Centralstrahls ($\alpha = 0$ in Gleichung (1)) den des reflectirten äußersten Randstrahls (aus Gleichung (1) α = halbe Apertur) subtrahirt, oder kurz von Gleichung (4) die Gleichung (1) subtrahirt. (Von der Behauptung eingangs 10 überzeuge man sich durch je vier Constructionen für jeden Spiegel entsprechend den vier bekannten charakteristischen Lagen des leuchtenden Punktes auf der Axe).

Folgerung: Die Längenabweichung der parallelen Strahlen wird durch die Gleichung bestimmt

$$(9)\quad l = f\,\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}.$$

Beweis aus Gleichung (8), wenn wir für $g \mp f = g \mp 2f \pm f$ setzen und Zähler und Nenner mit $g \mp 2f$ dividiren und dann $g = \infty$ setzen.

Anmerkung 1. Aus Gleichung (8) folgt, daß für denselben leuchtenden Haupt-Axenpunkt (g constant), die Längenabweichung zwischen den Grenzen 0 und $\pm\,\frac{(2f \mp g)^2}{g \mp f}$ liegt, wo die Vorzeichen die Bedeutung wie in Gleichung (8) haben. Bei der Frage nach der Längenabweichung wird nur ein absoluter Größenwerth gesucht; welche Bedeutung hat daher das $(\pm)$ vor dieser Größe?

Anmerkung 2. Aus Gleichung (9) folgt, daß für parallele Strahlen das Minimum der Längenabweichung $= 0$, das Maximum $= \infty$ ist, für eine Zwischen-Apertur von $120^0 = f$.

Anmerkung 3. Da nach (2) Folgerung 1. die Parallelstrahlen beider Spiegel, die eine Grade bilden, den Axenschnittpunkt ihres reflectirten Strahls gemeinschaftlich haben, so läßt sich bei Parallelstrahlen für alle möglichen Aperturen die Längenabweichung leicht veranschaulichen: der Krümmungsradius drehe sich um den Krümmungsmittelpunkt von 0^0 bis 90^0; dann ist der Abstand des Schnittes des in seiner Mitte errichteten Lothes mit der Axe vom Focus abgerechnet die zur Winkelerhebung des Radius gehörige Längenabweichung.

11) (Fig. 11.) Die Seitenabweichung (s) bei einem Spiegel mit großer Apertur (2α) wird durch die Gleichung bestimmt

$$(10)\quad s = f(g \mp 2f)\ \mathrm{tang}\ (\alpha + i)\left[\frac{1}{(g \mp 2f)\ \cos\alpha \pm f} - \frac{1}{g \mp f}\right],$$

wo i den Einfallswinkel des Randstrahls und die Vorzeichen die Bedeutung in der Gleichung (8) haben. (Siehe (3) Folgerung 2; und (6) Anmerkung 1.)

Beweis: Es sei LA der Randstrahl, der in der Richtung AB'F reflectirt werde; B sei der Vereinigungspunkt der Centralstrahlen für $\alpha = 0$. Dann ist BB' die Längenabweichung l; es ist die Seitenabweichung BF = s zu suchen. Es ist $\frac{s}{l} = \frac{AE}{B'E} = \mathrm{tang}\ k = \mathrm{tang}\ (\alpha + i)$; daraus und aus Gleichung (8) der Werth von s.

1. Folgerung: Für Parallelstrahlen ist nach Gleichung (9) die Längenabweichung

$$(11)\quad s = f\,\frac{\mathrm{tang}\,2\alpha}{\cos\alpha}\,(1 - \cos\alpha).$$

2. Folgerung: Die Seitenabweichung für Parallelstrahlen bewegt sich in den Grenzen 0 und (— 2f), wenn α von 0^0 bis 90^0 wächst; (das (—) deutet an?) sie geht dabei durch $\pm\infty$ bei $\alpha = 45^0$; warum?

1. Anmerkung: Die reflectirten Randstrahlen bilden den Mantel eines Doppelkegels, dessen Spitze der dem Spiegel zugekehrte Endpunkt der Längenabweichung ist; ein im Vereinigungspunkte der Centralstrahlen lothrecht zur Axe errichteter Schirm wird diesen Kegel lothrecht zu seiner Axe schneiden; der Radius des auf dem Schirme erscheinenden Lichtkreises ist eben die Seitenabweichung. Ein leuchtender Axenpunkt wird sich auf diesem Schirme in Folge der Seitenabweichung als eine um so größere matt (in Folge der Längenabweichung) erleuchtete Kreisfläche darstellen, je größer die Apertur ist; andrerseits wird selbst die kleinste Apertur einen Punkt immer als eine wenn auch noch so kleine Kreisfläche abbilden. Daraus folgt, daß jeder sphärische Spiegel eine Summe aufeinanderfolgender Punkte, einen Gegenstand, als eine Summe aufeinanderfolgender, sich theilweis deckender, matterhellter Kreise darstellen muß, d. h. **kein** sphärischer Spiegel liefert **scharfe**, dem Gegenstand **gleich helle** Bilder.

2. Anmerkung: Der gesammte Strahlenkegel eines leuchtenden Axenpunktes wird vom sphärischen Spiegel als eine Summe von Doppelkegel-Mänteln reflektirt, von welchen die im Spiegel liegenden Peripherien der Grundflächen dem optischen Mittelpunkte sich continuirlich nähern, die Spitzen aber sich continuirlich (dem Schnittpunkt der Centralstrahlen zu) entfernen. Deßhalb müssen sich je zwei aufeinanderfolgende Kegelmäntel diesseits der Spitzen in einer Kreislinie schneiden, deren Fläche senkrecht auf der Axe steht; jenseits der Spitzen werden sämmtliche Kegelmäntel sich gegenseitig wie die Schalen einer Zwiebel einhüllen. Die Summe jener continuirlich aufeinanderfolgenden Schnittkreislinien mit continuirlich abnehmendem, schließlich zu einem Punkte zusammenschrumpfendem Durchmesser markiren eine Fläche, die katakaustische Fläche (Brennfläche). Ihre Spitze liegt im Schnittpunkte der Centralstrahlen, ihr Grundkreis fällt mit dem Rande des Spiegels zusammen. Sie hat bei sphärischen Spiegeln im Allgemeinen die Gestalt eines Trichters mit nach Innen gekrümmten Seitenwänden. Diese Brennfläche ändert mit α und g ihre Größe und ihre Form. Jeder individuell gekrümmte Spiegel hat für jede besondere Stellung des leuchtenden Punktes seine individuelle Brennfläche. Jeder Axenschnitt des Spiegels schneidet die Brennfläche in einer krummen

Linie, welche die katakaustische Curve (Brennlinie) des Axenschnitts heißt. Sie ist nichts anderes als die Summe aller der unendlich nahen Punkte, in welchen je zwei benachbarte reflectirte Strahlen in dieser Axenschnittebene sich schneiden.

12. Das Bild eines leuchtenden Punktes ist für alle Lagen desselben im Raume vor einem Convex- oder Concavspiegel kein Punkt, sondern eine stets im Concav-Raume liegende Brennfläche; ausgenommen, wenn er im Krümmungsmittelpunkt liegt. Dieser Ort ist der einzige im ganzen Raume, für welchen das Bild des Punktes wieder ein Punkt ist.

Denn da sich je zwei aufeinanderfolgende Strahlen in unter einander getrennt liegenden Punkten schneiden, so hat der leuchtende Punkt so viele Bildpunkte, als die benachbarten reflectirten Strahlen Schnittpunkte aufweisen, also unzählig viele. Diese bilden aber in ihrer Gesammtheit die Brennfläche. Diese Brennfläche reducirt sich auf den Theil in der Nähe ihrer Spitze, also nahezu auf einen Punkt, wenn die Apertur sehr klein wird. Also für Spiegel mit kleiner Apertur wird das Bild beliebig liegender leuchtender Punkte eine unendliche kleine Brennfläche; sie liefern also allein unter den sphärischen Spiegeln ziemlich scharfe Bilder. Rückt der leuchtende Punkt in den Krümmungsmittelpunkt, so fällt die Spitze der Brennfläche eben dahin, vielmehr reduzirt sich diese auf ihre Spitze, da die Strahlen in sich reflectirt werden und also je zwei benachbarte erst im Krümmungsmittelpunkte sich schneiden; es wird also nur für diese Lage des leuchtenden Punktes sein Bild wieder ein Punkt.

Anmerkung: Die Rotationsflächen der übrigen Curven zweiten Grades — das Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid — theilen mit der Kugel diese Eigenschaft: in ihrem Hohlraum ist ein und eben nur ein Punkt vorhanden, in welchen der leuchtende Punkt gestellt werden muß, wenn die reflectirten Strahlen sich wieder in einem Punkte schneiden sollen. Sie haben das Besondere, daß diese beiden Punkte, nicht wie bei der Kugel, zusammenfallen, sondern getrennt auf ihrer Hauptaxe liegen und vertauschbar sind; diese beiden Punkte heißen die Brennpunkte dieser Flächen. Bei dem Paraboloid liegt der eine Brennpunkt im Unendlichen, d. h. nur parallel einfallende Strahlen schneiden sich bei ihm direct, oder rückwärts verlängert, (wenn sie auf die convexe Seite fallen) in einem Punkte, oder nur Strahlen, die vom endlichen Brennpunkte ausgehen oder herzukommen scheinen, werden parallel zur Hauptaxe reflectirt. Alle auf die convexe Seite eines Ellipsoids und Hyerboloids so auffallende Strahlen, als ob sie von dem einen Brennpunkte kämen, werden in der Weise auf der convexen Seite reflectirt, daß sie, rückwärts verlängert, sich sämmtlich im andern Brennpunkte schneiden. Alle leuchtende Punkte, die nicht in die Brennpunkte fallen, haben bei den genannten Flächen zweiten Grades auch Brennflächen zu Bildern. Alle übrigen krummen Flächen haben von leuchtenden Punkten nur Brennflächen als Bilder.

13) (Fig. 12 a und b.) Die Entfernung $EA = m$ des Schnittpunktes eines reflectirten Strahls und des unendlich nahen reflectirten Nachbarstrahls von seinem Spiegelpunkte d. i. **die Entfernung jedes Punktes der katakaustischen Curve von seinem Spiegelpunkte** wird durch die Gleichung bestimmt

$$(12)\quad m = \frac{sg'}{4g' \mp s}$$

wo die obern Vorzeichen für den Concav-, die untern für den Convexspiegel gelten, wo $s = AF$ das Sehnenstück des reflectirten Strahls und $g' = LA$ die Länge des einfallenden Strahls bedeutet.

Beweis: LA und LB seien zwei benachbarte einfallende Strahlen, AF und BG ihre reflectirten, die sich in E schneiden; es ist $EA = m$ zu suchen. Da A und B, folglich auch F und G, und O und P unendlich nahe liegen sollen, so können AB, FG und OP als gerade Linien und $EG = EF$ und $LP = LO$ angenommen werden; dann folgt aus Aehnlichkeit der $\Delta\Delta$ ABE und $EFG : m = s \cdot \frac{AB}{AB + FG}$; für $\frac{AB}{AB + FG}$ läßt sich aber $\frac{LA}{LO + 3LA}$ substituiren; denn da $\Delta\, LAB \sim \Delta\, LOB$, so folgt $AB : OP = LA : LO$ und für OP läßt sich $FG - 2AB$ einsetzen, da $OK - PM = FK - GM$, und ausgeführt für $2KM = 2AB$ gesetzt werden kann. Aber aus $AB : FG - 2AB = LA : LO$ folgt: $AB : FG + AB = LA : LO + 3LA$. Beim Concavspiegel ist $LO = LA - s$, beim Convexspiegel $= LA + s$; folglich $m = \frac{sg'}{4g' \mp s}$.

1. Anmerkung: Diese Gleichung können wir die Gleichung der Catacaustica für den Axenschnitt eines sphärischen Doppelspiegels vom Radius r nennen; für $g' = \infty$, also für Parallelstrahlen geht sie für beide Spiegel über in $m = \frac{s}{4}$, d. h. der Schnittpunkt eines reflectirten Parallelstrahls und seines benachbarten liegt stets $1/4$ der reflectirten Strahlensehne vom entsprechenden Spiegelpunkte. Für $g' = s$ (wenn der leuchtende Punkt $g = 2r$ vom optischen Mittelpunkte entfernt ist) geht sie für den Concavspiegel über in $m = \frac{s}{3}$, d. h. liegt der leuch-

tende Punkt im Schnittpunkte des Spiegelkreises und der Axe, so liegt jeder Punkt der Catacaustica am Ende des ersten Drittels jedes reflectirten Sehnenstrahls.

2. Anmerkung: Der Ausdruck $\frac{sg'}{4g' \mp s}$ erhält seinen Maximalwerth (die Spitze der katakaustischen Curve), wenn s seinen Maximalwerth $= 2r$ annimmt, was eintritt, wenn der einfallende Strahl in die Axe selbst fällt, also $g' = g$ wird; dann geht jener Ausdruck über in $m = \frac{gf}{g \mp f}$ und für Parallelstrahlen in $m = f$, Gleichungen, die wir schon in (4) und (5) für jene Axenpunkte erhalten haben, in denen sich die Centralstrahlen schneiden.

3. Anmerkung: Der leuchtende Punkt g, der Krümmungsmittelpunkt, die Spitze der katakaustischen Curve und der optische Mittelpunkt sind harmonische Punkte auf der Axe und theilen dieselbe für Concavspiegel vom optischen Mittelpunkte aus im Verhältniß von $g : g - r$, für Convexspiegel vom Krümmungsmittelpunkte aus im Verhältniß von $g + r : g$. Denn da die Spitze der katakaustischen Curve vom optischen Mittelpunkt um $\frac{gf}{g \mp f}$ und vom Krümmungsmittelpunkt (aus Gleichung 1 und 4) um $\frac{f(g \mp 2f)}{g \mp f}$ entfernt ist, verhalten sich beide Entfernungen wie $g : g \mp r$. Mithin ist die Construction der Spitze der katakaustischen Curve für ein beliebiges g die Construction des zweiten harmonischen Punktes, wenn der erste, dritte und vierte gegeben sind. Es stimmt mit früheren Resultaten, daß wenn der vierte Punkt g im ∞ ist, der zweite in die Mitte zwischen den ersten und dritten fällt.

14) (Fig. 13 a und b.) Die Formel $m = \frac{g's}{4g' \mp s}$ zu construiren oder zu jedem Spiegelpunkte den zugehörigen Punkt der Catacaustica des Axenschnitts durch Construction zu finden.

In beiden Figuren sei LA der einfallende, AF der reflectirte Strahl. Das Sehnenstück AO des einfallenden Strahls ist in K zu halbiren und zu den Punkten A, K, L der zweite harmonische Punkt B zu suchen. AB von A aus auf AF abgeschnitten giebt den dem A zugehörigen Punkt der Catacaustica.

Denn: $AE : AK = AB : \frac{s}{2} = AC : AD = AC : AC + CM = AL : AL + LK =$

$$g' : g' + g' \mp \frac{s}{2} = g' : 2g' \mp \frac{s}{2}; \text{ also } AE = m = \frac{\frac{s}{2} g'}{2g' \mp \frac{s}{2}} = \frac{g's}{4g' \mp \frac{s}{2}}.$$

1. Folgerung: Der Punkt E der Catacaustica ist der Schnittpunkt des reflectirten Strahls und des Berührungskreises in A über dem Linienstücke des Einfallsloths AC als Durchmesser, das erhalten wird, wenn man von A aus den Radius in demselben Verhältniß $g' : g' \mp \frac{s}{2}$ theilt, mit welchem die halbe Sehne harmonisch getheilt wurde. Denn ist $AG : GC = AB : BK$, so ist GB Loth, also B ein Punkt der Peripherie. $AE = AB$, folglich auch E ein Peripheriepunkt.

Bemerkung. Das Verhältniß $g' : g' \mp \frac{s}{2}$, nach welchem das Einfallsloth zu theilen ist, ist entsprechend dem Verhältniß $g : g \mp r$, nach welchem der Radius auf der Axe zu theilen war, um die Spitze der Catacaustica zu finden.

2. Folgerung: Für Parallelstrahlen ist $g' = \infty$, folglich das Verhältniß $g' : g' \mp \frac{s}{2} = 1 : 1$ d. h. jeder Punkt der Catacaustica für Parallelstrahlen ist Schnittpunkt des reflectirten Parallelstrahls und eines Berührungskreises über dem halbirten Einfallslothe als Durchmesser.

Liegt der leuchtende Punkt in der endlichen Entfernung $g = 2r$, ist also $g' = s$, so ist $g' : g' - \frac{s}{2} = 2 : 1$ d. h. jeder Punkt der Catacaustica für den leuchtenden Punkt im Schnittpunkte des Spiegelkreises und der Axe ist Schnittpunkt des reflectirten Strahles und des Berührungskreises über $^2/_3$ des Einfallsloths als Durchmesser. Liegt der leuchtende Punkt im Krümmungsmittelpunkte, also $g' = g = r$, dann ist die reflectirte Strahlensehne $s = 2r$ und $g' : g' - \frac{s}{2} = r : r - r = \infty$. Es ist in diesem Falle der Berührungskreis für jeden Spiegelpunkt der Kreis über dem Einfallslothe als Durchmesser, und da $i = 0$, so wird der Krümmungsmittelpunkt selbst als Catacaustica für diesen Fall anzusehen sein.

3. Folgerung: Allgemein ist für einen endlichen leuchtenden Punkt auf der Axe das Verhältniß $\frac{s}{g'}$ kein constantes, daher das Verhältniß $g' : g' \mp \frac{s}{2}$, in welchem das Einfallsloth zu theilen ist, auch variabel; d. h. die Durchmesser der Berührungskreise der Spiegelpunkte (vom optischen Mittelpunkt bis zum Tangentialpunkt des Strahls g') variiren continuirlich zwischen $\frac{gr}{2g \mp r}$ und $\frac{r}{2}$, sie nehmen also continuirlich ab für Concavspiegel und zu für Convexspiegel.

15) (Fig. 14—18.) Erklärungen: Von zwei Kreisen M und N, die sich von Außen oder Innen berühren, soll mit dem Kreise M ein Punkt P außer, auf oder innerhalb seiner Peripherie fest verbunden sein. Der Kreis M soll auf dem Kreise N fortschreitend rollen. Der Punkt P beschreibt in allen neun Fällen eine Rollkurve. Berührt der Kreis M rollend den Kreis N von Außen, so heißt die Rollkurve Epicycloide und zwar „verlängerte" (oder geschleifte Fig. 14), „gemeine" (Fig. 15), „verkürzte" (oder geschweifte Fig. 16), je nachdem der „beschreibende" Punkt P außerhalb, auf oder innerhalb der Peripherie des „rollenden" Kreises M liegt. Berührt aber der rollende Kreis M den „ruhenden" N von Innen, so heißt die entstehende Rollkurve verlängerte, gemeine, verkürzte Hypocycloide. Berührt aber die innere Seite des rollenden Kreises M die äußere des ruhenden N, so heißt die entstehende Rollkurve verlängerte (oder geschweifte), gemeine, verkürzte (oder geschleifte) Pericycloide. Berührt der rollende Kreis M einen ruhenden mit dem Radius $= \infty$, d. h. rollt er auf einer geraden Linie, so heißen die drei entstehenden Rollkurven Cycloiden. Berührt dagegen der rollende Kreis M mit unendlichem Radius einen ruhenden N mit endlichem Radius, d. h. rollt auf letzterem eine gerade Linie, so entstehen die drei Evolventen.

Die Epi-, Hypo-, Peri-Cycloide ist nur dann eine geschlossene Kurve, wenn das Verhältniß der Radien beider Kreise in endlichen und rationalen Zahlen gegeben ist. Denn nur dann läßt sich, da die Umfänge sich wie die Radien verhalten, die ganze Anzahl Umfänge von M aufstellen, die gleich der ganzen Anzahl Umfänge von N ist, oder bestimmen, wie oft M rollend sich um sich selber drehen und N umlaufen werden muß, damit die ursprünglichen Berührungspunkte, und somit der beschreibende Punkt P auf seine Anfangslage, aufeinander treffen. Die Verhältnißzahl jedes Radius giebt für den andern Kreis diese Anzahl an; ebenso die gleichhohen Vielfache dieser Verhältnißzahlen (Beweis leicht). Daraus geht hervor, warum die Cycloiden und die Evolventen keine geschlossnen Kurven sein können.

Die Construction der Epi-, Hypo- und Pericycloide ist kurz angedeutet folgende (der Beweis leicht!): [M sei Mittelpunkt des rollenden Kreises, und r_1 sein Radius; r_2 sei die unveränderliche Entfernung des beschreibenden Punktes P von M; N sei Mittelpunkt des ruhenden Kreises, r sein Radius.] Man halte fest: 1) daß der Mittelpunkt M des rollenden Kreises sich in einer Kreislinie um N bewegt mit dem Radius $r + r_1$ bei der Epicycloide, $r - r_1$ bei der Hypocycloide, und $r_1 - r$ bei der Pericycloide; 2) daß wenn man von der gemeinsamen Centrale aus die Kreislinie N in n gleiche Theile theilt, die von M in $\frac{r_1}{r}n$ gleiche Theile getheilt werden muß, um für beide Kreise gleiche Bogen zu erhalten. Die Construction ist dann einfach folgende: (Fig. 15) Beschreibe um N einen Kreis mit dem Radius resp. $r \pm r_1$ oder $r_1 - r$, theile von der gemeinsamen Centrale aus diesen in n gleiche Theile mit den Theilpunkten $M, M_1, M_2 \ldots M_{n-1}$, den Kreis M dagegen in $\frac{r_1}{r}n$ gleiche Theile mit den Theilpunkten A (anfänglicher Berührungspunkt), $A_1, A_2 \ldots A_{\left(\frac{r_1}{r}n-1\right)}$. Von N aus schlage Bögen mit den Entfernungen NA_1, $NA_2 \ldots$, die zu durchschneiden sind aus $M_1, M_2 \ldots$ etc. mit der constanten Entfernung r_2. Diese Schnittpunkte deuten den Verlauf der Kurve an.

Die Gestalt jeder der drei Epi-, Hypo-, Pericycloiden hängt vom Verhältniß der beiden Kreisradien ab. Z. B. erhält die gemeine Epicycloide die Gestalt in Fig. 17, wenn ein Kreis auf einem ruhenden von doppeltem Radius, dagegen die Gestalt in Fig. 18, wenn er auf einem ruhenden von gleichem Radius rollt. Die letztere gemeine Epicycloide heißt Cardioide (Herzlinie).

16) Die Catacaustica des Axenschnitts eines sphärischen Doppelspiegels ist a) für Parallelstrahlen eine gemeine Epicycloide, deren ruhender Kreis den doppelten Radius des rollenden hat (die Gestalt in Fig. 17); b) für Strahlen, die vom Axenpunkte $g = 2r$ ausgehen, diejenige gemeine Epicycloide, deren erzeugende Kreise gleiche Radien haben, also die Cardioide (Gestalt in Fig. 18).

(Fig. 19 a u. b.) Beweis: ad a) In 14. Folgerung 1 und 2 ist schon gezeigt worden, daß wenn $AK : KH = 1 : 2$, der Punkt E auf dem reflectirten Strahle der dem A zugehörige Punkt der Catacaustica ist. Es ist noch nachzuweisen, daß wenn Kreis DF auf dem Kreis um C rollt und in die Lage von Kreis AK kommt, dann der auf Kreis DF feste Punkt

F (Spitze der Catacaustica) nach E kommt, also eine Epicycloide als Catacaustica beschreibt. Arc FK ist gleich Arc EK; denn $FK = KH \cdot \alpha$ und $EK = AK \cdot 2i$; folglich $FK : EK = \frac{KH}{AK} : \frac{2i}{\alpha}$; da aber $i = \alpha$, so auch Arc FK = Arc EK.

ad b) (Fig. 20) Es ist schon in 14, Folgerung 1 und 2 dargethan, daß wenn L auf der Peripherie in der Axe liegt und $AK : KH = 1 : 1$, dann E auf dem reflectirten Strahle der zu A zugehörige Punkt der Catacaustica ist. Zu beweisen ist noch, daß wenn der Kreis in der Lage DB auf dem um C in die Lage AK rollt, der auf Kreis DB feste Punkt B (Spitze der Catacaustica) in E fällt, daß also Arc BK = Arc EK ist; $BK = KH \cdot \alpha$; $EK = AK \cdot 2i$; also $BK : EK = \frac{KH}{AK} : \frac{2i}{\alpha}$; $2i = \alpha$, da Arc LM = 2 Arc LN ist, folglich Arc BK = Arc EK.

§. 7.

Fragen, Aufgaben und Lehrsätze zu §§. 5—6.

1) Welches sind die charakteristischen optischen Unterschiede zwischen dem ebenen und sphärischen Spiegel?

2) Wie ist der Krümmungsradius und die Bildweite eines Concav-Convexspiegels experimentell zu finden?

3) Warum sind die **virtuellen** Bilder beim sphärischen Spiegel überall im Raume vor dem Spiegel zu sehen, warum aber die **reellen** nicht überall? Wo muß sich im Allgemeinen das Auge befinden, um die reellen Bilder sehen zu können? wie macht man diese schärfer und überall sichtbar?

4) Ein Gegenstand (Pfeil) befinde sich, die Axe schneidend, in folgenden vier Lagen: a) zwischen dem Krümmungsmittelpunkt und $(+\infty)$, b) zwischen dem Krümmungsmittelpunkt und dem Focus; c) zwischen dem Focus und dem Spiegel; d) zwischen dem Scheitel und $(-\infty)$; es soll in jeder dieser Lagen für beide Spiegel sein Bild construirt werden. (Folgerung?)

5) Ein Gegenstand (Pfeil) befinde sich außerhalb der Axe irgendwo a) vor dem Concav-, b) vor dem Convexspiegel; sein Bild ist zu construiren.

6) Ein Gegenstand befinde sich nacheinander in den in Aufgabe 4 angegebenen charakteristischen vier Lagen; es ist jedes Mal das Stück Ebene des Axenschnitts eines Concavspiegels zu bestimmen, in welchem sich das Auge befinden muß, wenn es das Bild ganz und direct sehen will.

7) Bildet das Bild stets denselben Winkel mit der Hauptaxe, den der Gegenstand bildet? Grund?

8) Welche charakteristischen Merkmale haben die Bilder der dunkeln Glaskugeln in Gärten? Warum sind in denselben die Bilder fernerer Gegenstände scharf, näherer Gegenstände aber verzerrt?

9) Auf der Axe eines sphärischen Doppelspiegels mit geringer Apertur und einem Krümmungsradius von 9 ^{dcm} befinde sich in einer Entfernung von 50 ^{m}, 1 ^{m}, 5 ^{dcm}, 2 ^{dcm} vor beiden Spiegeln ein Gegenstand. Es sind für jeden Spiegel die acht Bildörter auszurechnen.

10) Vorausgesetzt, daß in den in Aufgabe (9) angegebenen acht Lagen der Gegenstand derselbe bleibe; haben dann die acht Bilder des Concavspiegels dieselbe Größe, als die entsprechenden des Convexspiegels?

11) Auf einen Concavspiegel mit einem Krümmungsradius von 14 ^{dcm} und nacheinander von 40°, 20°, 8°, 4° Apertur (wie verringert man schnell die Apertur?) fallen Strahlen convergent so auf, als ob sie von einem 30 ^{m} hinter dem Spiegel auf der Axe liegenden Punkte herkämen; welche Entfernung vom Scheitel hat jedes Mal der Schnittpunkt der Randstrahlen? Welchem Zahlenwerthe nähert sich der Werth dieser Entfernungen?

12) Wie groß ist der Krümmungsradius eines Hohlspiegels von 20°, 4°, 1,5°, 0° Apertur, wenn die auf die Hohlspiegel auffallenden convergenten Strahlen von einem Axen-Punkte 24,5 ^{m} hinter dem Spiegel herzukommen scheinen und seine Randstrahlen stets 4 ^{dcm} vor dem Spiegel die Axe schneiden?

13) Bei einem sphärischen Spiegel vom Krümmungsradius $r = 3^{m}$ und von sehr kleiner Apertur soll ein Gegenstand so auf der Axe placirt werden, daß sein Bild von ihm um $d = 20^{m}$ entfernt ist. Wie weit vom optischen Mittelpunkte befindet sich a) beim Concav-, b) beim Convexspiegel Gegenstand und Bild?

14) Bei einem sphärischen Spiegel mit dem Krümmungs-Radius $r = 1{,}8^{m}$ sollen die Bilder $\frac{1}{n}$ ($n = 10,\ 2,\ 1^1/_3,\ ^1/_2,\ ^1/_4,\ 0{,}07$) mal die Größe des Ggenstandes haben. Wo muß a) für den Concav-, b) für den Convexspiegel jedes Mal der Gegenstand sich befinden.

15) Bei einem Convexspiegel hat das reelle Bild die n fache ($n = 5,\ 10,\ 20$) Größe des virtuellen Gegenstandes, dessen Entfernung vom Spiegel $b = 0{,}8^{m}$ ist. Welchen Krümmungsradius hat der Spiegel?

16) Die Sonnenstrahlen werden von einem Hohlspiegel mit einem Krümmungsradius von $3,5^{m}$ aufgefangen; wenn der scheinbare Sonnendurchmesser vom Krümmungsmittelpunkt aus gesehen 32′ beträgt, wie groß ist dann der Durchmesser des Sonnenbildes?

17) Der leuchtende Gegenstand wandere vom Scheitel eines sphärischen Spiegels mit der Focalweite $= f$ nach ∞ der Concavseite, springe um nach dem ∞ der Convexseite und rücke dann nach dem Scheitel des Spiegels. Welches Schema über die Größenverhältnisse der Bilder wird erhalten?

18) Warum convergiren, wenn der leuchtende Punkt außerhalb der Axe zwischen ∞ und Focus liegt, der reflectirte Parallelstrahl und die secundäre Axe nach der entgegengesetzten Seite der Hauptaxe, dagegen nach derselben Seite, wenn er zur Seite der Focalweite liegt? (mathematisch zu begründen.)

19) Es ist ein Schema der Werthe aufzustellen, welche die Längenabweichung annimmt, wenn bei constanter Apertur der leuchtende Punkt zu beiden Seiten des sphärischen Doppelspiegels auf der Axe vom Scheitel nach ∞ rückt.

20) Es ist die Forderung der Aufgabe 19 zu erfüllen, wenn der leuchtende Punkt auf der concaven oder convexen Axenseite einen festen endlichen Ort einnimmt, aber die Apertur des Spiegels von 0^{0} bis 180^{0} wächst.

21) Die Längenabweichung reflectirter Parallelstrahlen liegt für die Aperturen 0^{0} bis 180^{0} zwischen 0 und ∞. Bei der Apertur 60^{0} ist die Längenabweichung $= f$ und der reflectirte Randstrahl geht durch den optischen Mittelpunkt (auch geometrisch zu beweisen).

22) Bei einem sphärischen Spiegel sei die Längenabweichung paralleler Strahlen $l = 0,4\ f$, $^{1}/_{2}\ f$, $10\ f$. Welche Apertur muß dann der Spiegel haben?

23) Ein leuchtender Punkt befinde sich $g = 100^{m}$, 4^{m}, $0,5^{m}$, 1^{dem} zu beiden Seiten auf der Axe eines sphärischen Spiegels mit 45^{0} Apertur und einem Krümmungsradius $r = 3,5^{m}$; wie groß ist die Längenabweichung in Bezug auf beide Spiegel?

24) Welche Werthe durchläuft die Längenabweichung bei einem Hohlspiegel von 120^{0} Apertur und einem Krümmungsradius $r = 3,4^{m}$, wenn der leuchtende Punkt auf der Axe von ∞ bis zum Scheitel rückt?

25) Welche Längenabweichung hat für parallele Strahlen ein sphärischer Spiegel mit dem Krümmungsradius $r = 2,8^{m}$ und der Apertur $2\alpha = 120^{0}$, 90^{0}, 60^{0}, 45^{0}, 30^{0}?

26) Die Längenabweichung für parallele Strahlen sei $l = 0,5^{dem}$, 8^{dem}, $1,7^{m}$, 20^{m}; die Apertur des sphärischen Spiegel sei 75^{0}; wie groß ist sein Krümmungsradius?

27) Der virtuelle leuchtende Punkt stehe in der Mitte der Focalweite (für einen Convexspiegel). Wie groß ist bei einer Apertur von 120° die Längenabweichung? Was bedeutet das Minus vor dem Resultate?

28) Für welche Apertur halbirt der reflectirte parallele Randstrahl die Focalweite?

29) Bei welcher Apertur ist für paralle Strahlen die Seitenabweichung = f? [Gleichung 4. Grades!)

30) Der Krümmungsradius bewegt sich um den Krümmungsmittelpunkt von 0° bis 90°; welchen Inhalt nimmt während der Drehung das Flächenstück an, das vom Krümmungsradius, dem reflectirten Parallelstrahl und dem zugehörigen Axenstücke eingeschlossen wird?

31) Auf einen Spiegelpunkt in der Winkelentfernung α vom optischen Mittelpunkte falle ein Parallelstrahl und ein divergenter Strahl ein, der verlängert die Axe in der Entfernung g vom optischen Mittelpunkte schneidet und zwar a) auf der concaven b) auf der convexen Spiegelseite. Es ist zu untersuchen, in welcher Weise das Axenstück zwischen den Schnittpunkten der reflectirten Strahlen abhängig ist a) von der Entfernung g; b) von der Größe der Winkelerhebung α?

32) Die Länge des reflectirten Parallelstrahls bis zum Schnitt mit der Axe liegt für die Apertur 0° — 180° zwischen f und ∞; bei 120° ist sie =? (letzteres Resultat ist schon aus der Figur zu ersehen).

33) Der höchste Werth der Tangente des Winkels (φ), den die aus der Axenentfernung g auf einen Hohlspiegel von 180° Apertur auffallenden Strahlen mit der Axe bilden ist $\tang \varphi = \frac{2f}{g - 2f}$.

34) Aus der Axen-Entfernung g fällt auf einen sphärischen Doppelspiegel mit dem Radius r in der Winkelentfernung α vom optischen Mittelpunkt ein Strahl auf. Der Einfalls- und Reflexionswinkel (i) desselben wird durch die Gleichung bestimmt: $\operatorname{cotang} i = \operatorname{cotang} \alpha \pm \frac{2f}{g \mp 2f \sin \alpha}$.

35) Die Tangente des Einfallswinkels (i) eines vom optischen Mittelpunkte eines sphärischen Spiegels kommenden und in der Winkelentfernung α von demselben auffallenden Strahls ist gleich der negativen reciproken Tangente der halben Winkelentfernung α; also $\tang i \cdot \tang \frac{\alpha}{2} = -1$. (Wie groß i, wenn $\alpha = 90°$, $= 60°$ ist? — auch aus der Figur herzuleiten.)

36) Die Länge eines aus der Axenentfernung g kommenden, von einem sphärischen Spiegel in der Winkelentfernung α vom optischen Mittelpunkte reflectirten Strahls (k) ist bis zum Schnitt mit der Axe durch die Gleichung bestimmt

$$k = \frac{f(g \mp 2f) \sin \alpha}{[(g \mp 2f) \cos \alpha \pm f] \sin i},$$

(i ist aus Aufgabe 34 zu bestimmen).

37) Was bedeutet eine negative Seitenabweichung. Welche Stellung hat jeder reflectirte Randstrahl zur Axe, wenn der Werth der Seitenabweichung aus $+\infty$ nach $-\infty$ überspringt?

38) Um einen dem optischen Mittelpunkte sehr nahen Punkt des Axenschnitts eines sphärischen Spiegels (siehe 6, Anm. 3) bewegen sich, vom Scheitel ausgehend, in entgegengesetzter Richtung zwei Gerade so, daß ihre Schnittpunktenpaare in der Axe stets zugeordnete Leucht- und Bildpunkte sind. Es sind allgemein die Winkel auszurechnen, die bei dieser Bewegung die beiden Geraden in jedem Momente der Bewegung mit dem als Loth im Scheitel aufzufassenden Spiegelbogen bilden. (Gesetz dieser Winkelbewegung).

39) Auf der Axe eines Hohlspiegels von $f = 1,5^{m}$ Brennweite steht $m = 2,2^{m}$ vom optischen Mittelpunkte ein kleiner Planspiegel unter 45^{0} Neigung so jenem gegenüber, daß die Axe durch seinen Mittelpunkt geht. Wo liegt das von beiden Spiegeln reflectirte Bild eines auf der Axe um $g = 20^{m}$ vom optischen Mittelpunkte entfernten Gegenstandes? (Einrichtung des Newtonschen Spiegeltelescopen!)

40) In einem Newtonschen Spiegeltelescopen habe der Hohlspiegel die Brennweite $f = 2^{m}$; 1) wie weit von ihm ist das durch ihn hervorgebrachte Bild eines 200^{m} auf der Axe entfernt stehenden $1,2^{m}$ hohen Gegenstands? 2) wie groß ist dasselbe? 3) wie weit vom Spiegel muß auf seiner Axe unter 45^{0} Neigung ein Planspiegel angebracht werden, damit das Bild $a = 2^{dcm}$ seitwärts zur Axe fällt? 4) welche Lage hat das seitwärts gelegte Bild zur Axe und wie groß ists? 5) das seitwärts gelegte Bild soll parallel der Axe des Spiegeltelescopen zu liegen kommen; unter welchen Winkel zur Axe muß der Planspiegel gestellt werden, wenn der Gegenstand mit der Axe einen Winkel von 60^{0} bildet?

41) Nennen wir die Größe eines lothrecht auf der Axe eines sphärischen Spiegels mit der Focalweite f stehenden Gegenstandes y, seine Entfernung vom Scheitel x, die Höhe des Bildes η, seine Entfernung vom Scheitel ξ; dann bestehen zwischen den rechtwinkeligen Coordinaten x, y und ξ, η des nicht auf der Axe liegenden End-

punktes des Gegenstandes und des Bildes (also zweier beliebiger zugeordneter Leucht- und Bildpunkte in der Ebene vor dem Spiegel) die Beziehungen: $\xi = \frac{xf}{x - f}$, $\eta = -y\frac{\xi}{x}$. (Gleichungen 7 und 4!)

42) Die rechtwinkligen Coordinaten der Endpunkte eines Gegenstandes sind

$$\left.\begin{array}{llll} x = 9, & 12, & 2\frac{1}{2}, & -10; \\ y = 2, & -\frac{1}{2}, & 2, & +8; \\ x_1 = 7, & 10, & 1\frac{1}{4}, & -14; \\ y_1 = \frac{1}{4}, & -3, & -2, & -2; \end{array}\right|$$

welches sind die jedesmaligen Coordinaten ξ, η und ξ_1, η_1 des Bildes, wenn der Gegenstand a) vor der Concav-, b) vor der Convexseite eines sphärischen Doppelspiegels mit einem Radius $r = 6$ liegt? Welche Lage des Bildes zur Axe läßt sich aus seinen Coordinaten herauslesen?

43) Sind die rechtwinkligen Coordinaten xyz eines leuchtenden Punktes in Bezug auf den optischen Mittelpunkt des Spiegels mit dem Radius $r = 2f$ als Anfangspunkt gegeben, so werden die des Bildpunkts durch die Gleichungen bestimmt:

$$\xi = x \cdot \frac{f}{x - f};\quad \eta = -y \cdot \frac{f}{x - f};\quad \zeta = -z \cdot \frac{f}{x - f}.$$

44) Bestimme zu drei im optischen Mittelpunkte eines Hohlspiegels mit der Brennweite $f = 3$ sich senkrecht schneidenden Ebenen die Lage des Bildes eines Pfeils, dessen Lage durch die rechtwinkligen Coordinaten seiner Endpunkte bezogen auf jene drei Ebenen folgendermaßen gegeben sind:

$$x = 2;\quad y = -4;\quad z = -8;$$
$$x_1 = 5;\quad y_1 = 2;\quad z_1 = 4.$$

45) Es ist auf der Axe des sphärischen Doppelspiegels zu beiden Seiten desselben ein leuchtender Punkt in endlicher Entfernung gegeben; es soll durch Construction der Verlauf der Catacaustica bestimmt werden.

46) Zwei sich außen berührende Kreise sind gegeben, deren Radien sich a) wie 1 : 2, b) wie 1 : 1 verhalten sollen; der eine Kreis rolle fortschreitend auf dem andern, so daß der anfängliche Berührungspunkt eine Epicycloide beschreibt; es ist dieselbe durch Construction zu finden.

47) Ein Gegenstand wandere vom optischen Mittelpunkte aus durch beide Axenseiten; es sind für beide Spiegel die Eigenschaften der entstehenden Bilder zusammenzustellen und zwar I. in Beziehung auf ihre Lage a) in der Axe, b) zur Axe, (ob aufrecht &c.) II. in Beziehung a) zum Spiegel (ob reell &c.), b) zum Gegenstand (ob vergrößert &c.).

48) Auf einen sphärischen Doppelspiegel von $r = 5^{cm}$ und 50^0 Apertur fallen a) parallele Strahlen, b) Strahlen aus einer Entfernung $g = 20^m$ auf; wie groß ist die erleuchtete Kreisfläche auf einer im Vereinigungspunkte der Centralstrahlen aufgestellten lothrechten Ebene.

49) Auf einen sphärischen Doppelspiegel mit der Brennweite 8^{dcm} fallen a) Parallelstrahlen, b) Strahlen von einem leuchtenden Axenpunkte aus der Entfernung $g = 30^m$ in der Winkelentfernung α vom optischen Mittelpunkte ($\alpha = 10^0$, 15^0, 20^0, 30^0) auf, deren reflectirte Strahlen von ihren unendlichen nahen Nachbarstrahlen geschnitten werden. In welcher Entfernung vom reflectirenden Spiegelpunkte geschieht dies? (Die Entfernung g ist auf beiden Axenseiten anzunehmen und jede gilt für beide Spiegel.)

50) Es gelten die Voraussetzungen der vorigen Aufgabe. Die aus den angegebenen Winkelerhebungen α reflectirten Strahlen werden in der Form von Kegelmänteln reflectirt. Wie groß ist nun die Fläche jener Kreislinien, in welchen diese Kegelmäntel von den ihnen unendlichen nahen Mänteln geschnitten werden?

51) Es gelten die Voraussetzungen der Aufgaben 49 und 50. Die in Form von Kegelmänteln reflectirten Lichtstrahlen durchschneiden die catacaustische Fläche des Spiegels je in einer Kreislinie. Wie weit ist jeder Punkt derselben vom optischen Mittelpunkte des Spiegels entfernt?

52) Die in voriger Aufgabe gemeinte Schnittcurve des reflectirten Strahlenkegelmantels und der catacaustischen Fläche werden als Basis eines Kegels betrachtet, dessen Spitze der optische Mittelpunkt des Spiegels sei; a) wie groß ist der Inhalt dieses Kegels, wenn der reflectirende Spiegelkreis die Winkelerhebung $\alpha = 50^0$ hat, und im Uebrigen die Voraussetzungen von Aufgabe 49 und 50 gelten. b) wie groß ist dieselbe, wenn der leuchtende Punkt im Schnittpunkt der Axe und des zur Kugel vervollständigten Spiegels liegt; c) hat in diesem letzten Falle für alle möglichen α der Kegelinhalt ein Maximum?